Fibo

Les lapins de Fibonacci

JPS

2013

Fibo

Le problème de Fibonacci

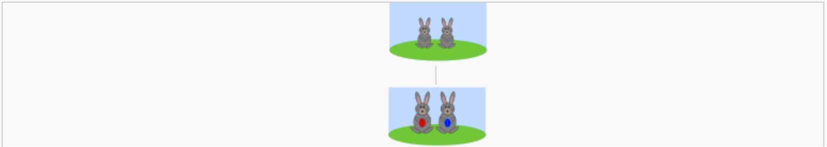
La suite de Fibonacci est une suite d'entiers très connue. Elle doit son nom à un mathématicien italien (1175-1250) connu sous le nom de Leonardo Fibonacci qui, dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages décrit la croissance d'une population de lapins :

« un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

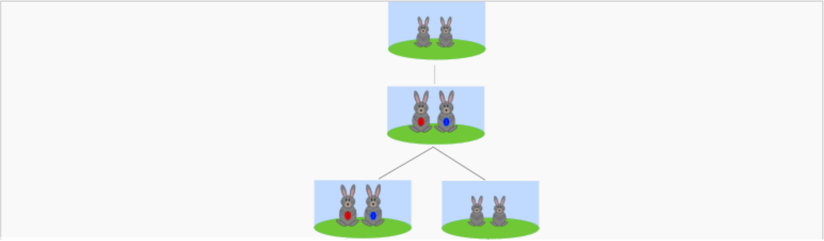
Remarque : les lapins de Fibonacci ne meurent jamais !

Le premier mois

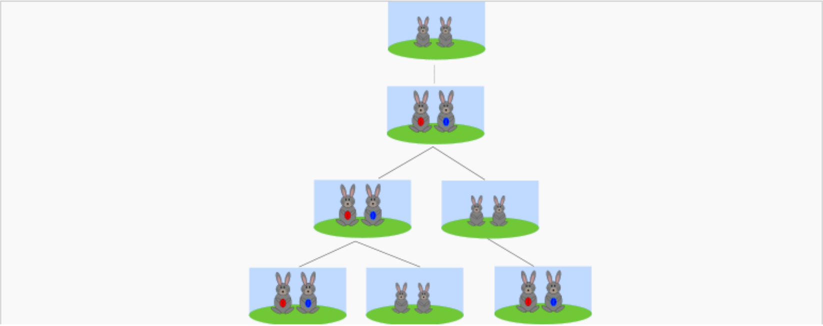
Le deuxième mois



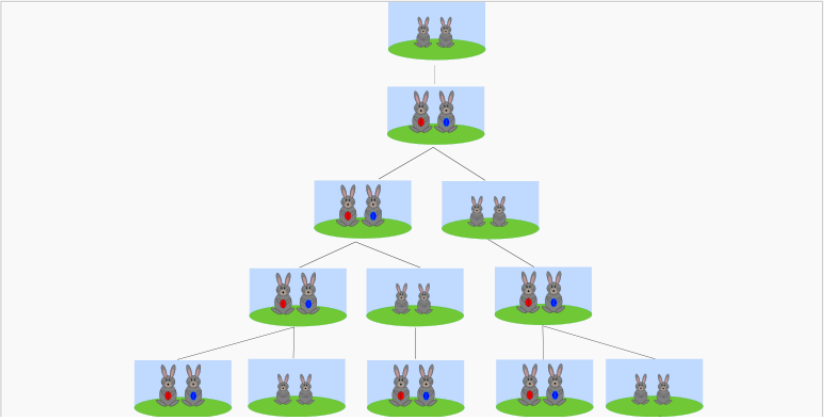
Le troisième mois



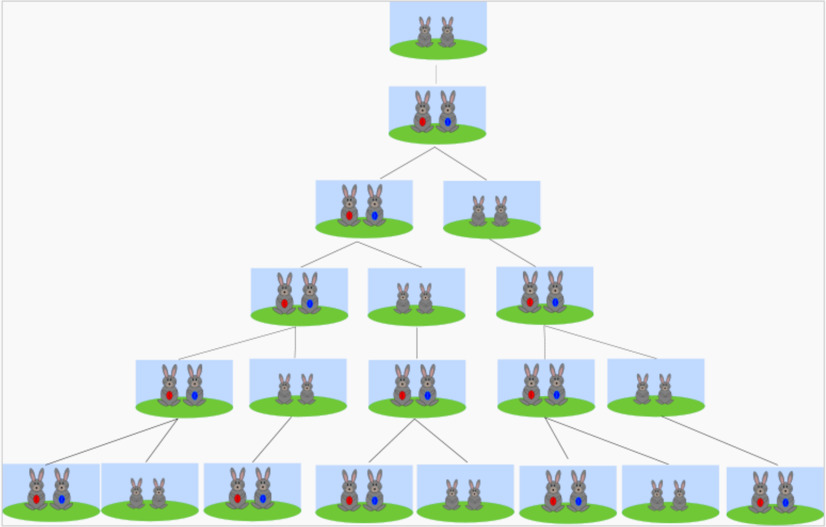
Le quatrième mois



Le cinquième mois



Le sixième mois



La suite de Fibonacci

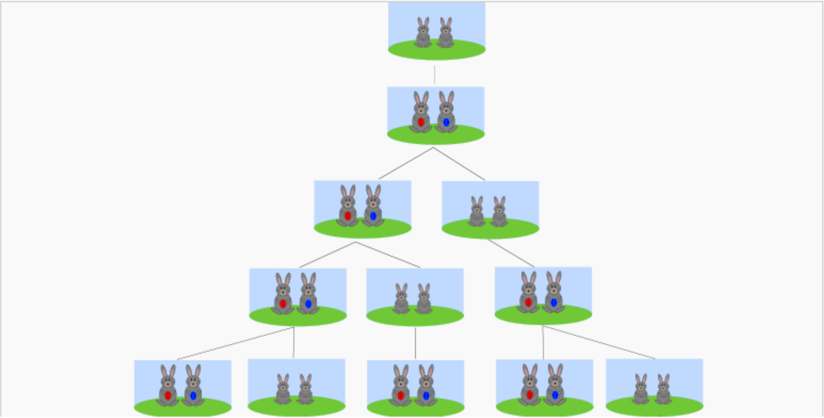
On appelle $\mathcal{F}_n$ le nombre de couples de lapins au n-ème mois. On veut essayer d'exprimer $\mathcal{F}_n$ en fonction du nombre de couples de lapins des générations précédentes.

On se place au n-ème mois. Combien de lapins trouve-t-on ?

La suite de Fibonacci

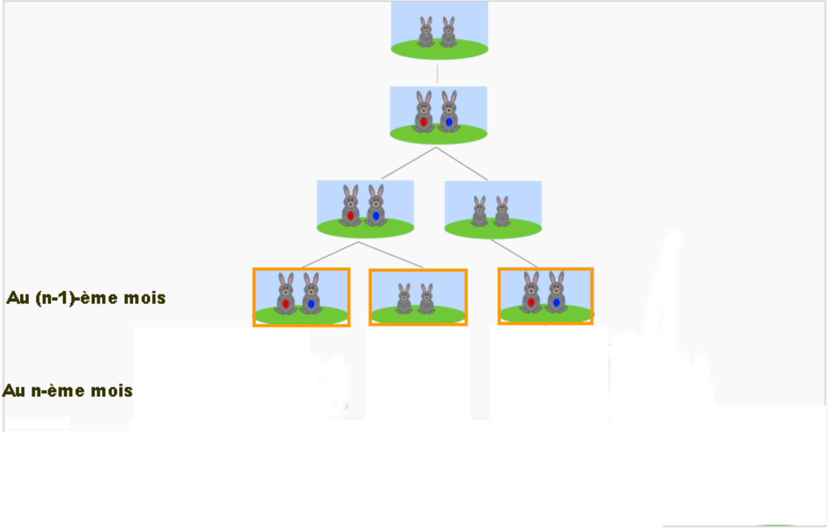
On appelle $\mathcal{F}_n$ le nombre de couples de lapins au n-ème mois. On veut essayer d'exprimer $\mathcal{F}_n$ en fonction du nombre de couples de lapins des générations précédentes.

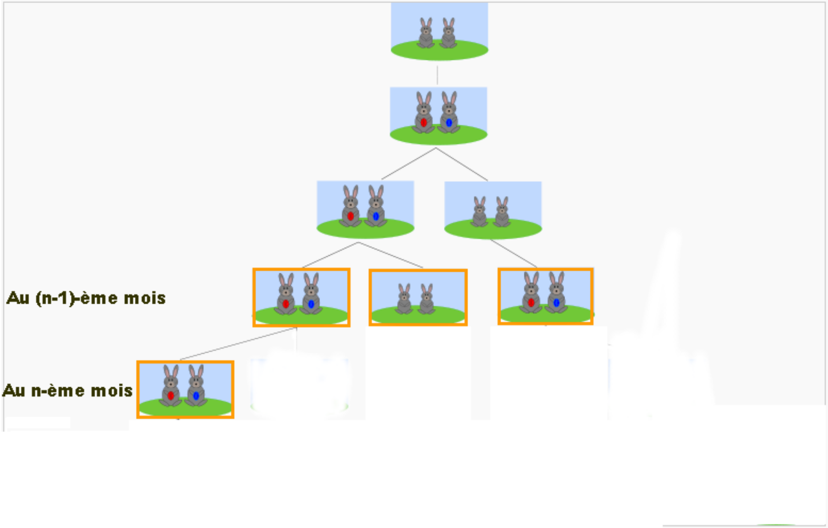
On se place au n-ème mois. Combien de lapins trouve-t-on ?

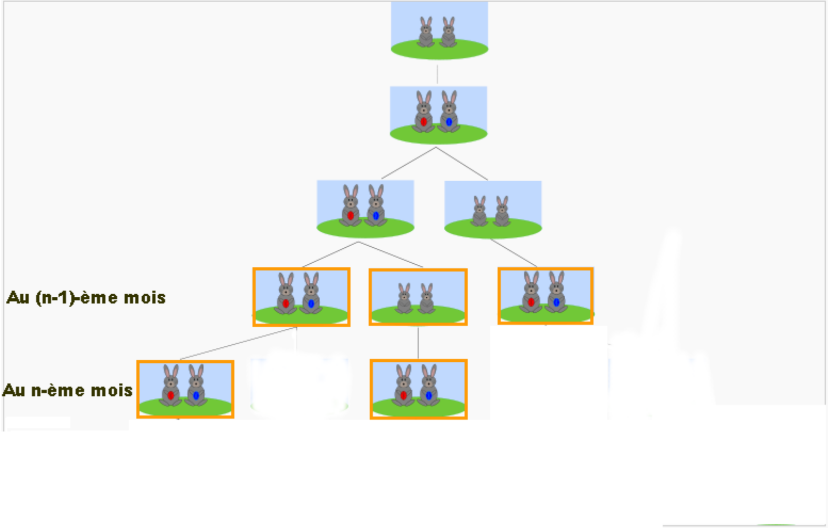


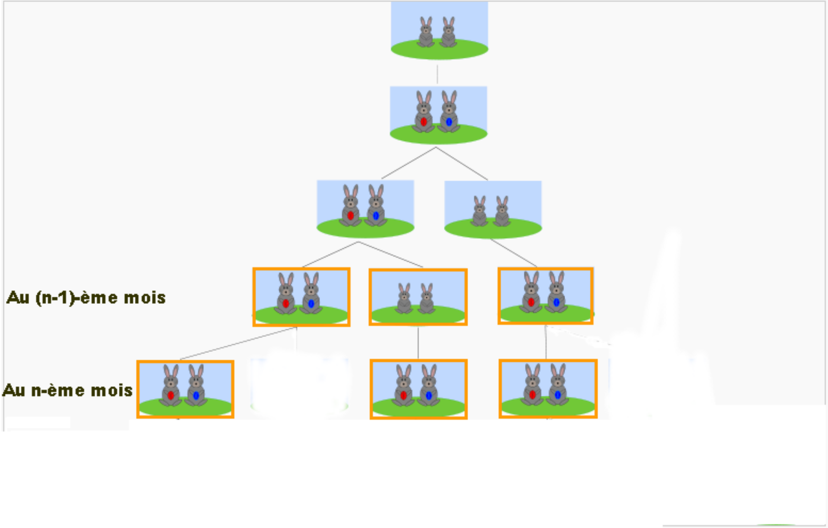
Tout d'abord, il y a tous les lapins
de la génération précédente (celle du $(n-1)$-ème mois) qui ont vieilli.

Tout d'abord, il y a tous les lapins
de la génération précédente (celle du $(n-1)$-ème mois) qui ont vieilli.

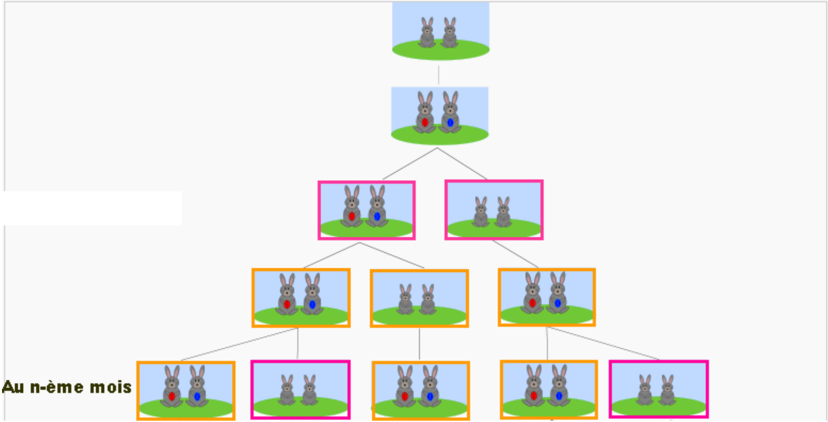



Au (n-1)-ème mois
Au n-ème mois


Au (n-1)-ème mois
Au n-ème mois

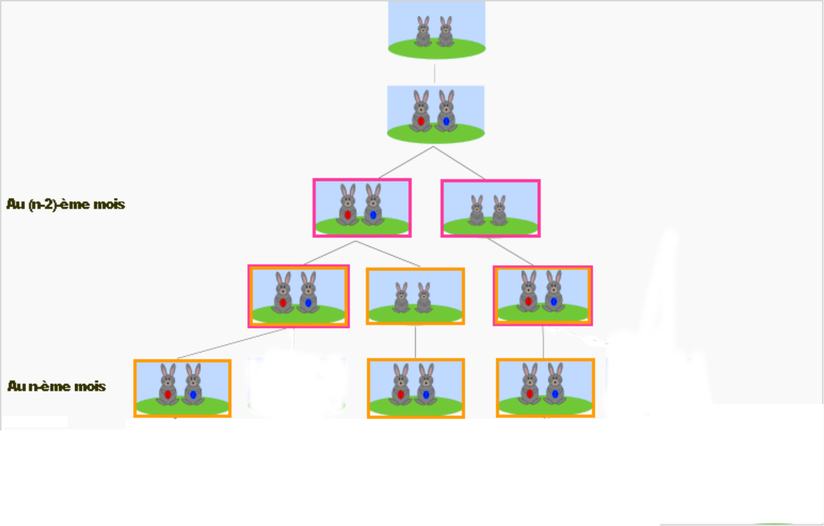

Au (n-1)-ème mois
Au n-ème mois

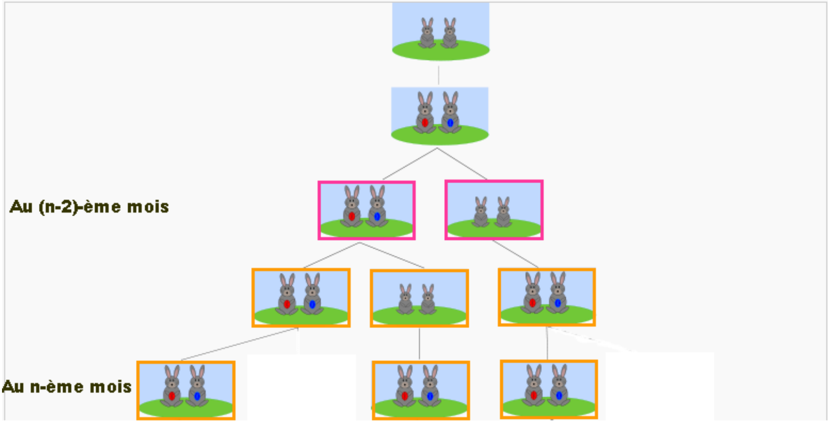
Ensuite, on trouve tous les nouveaux lapereaux mis au monde

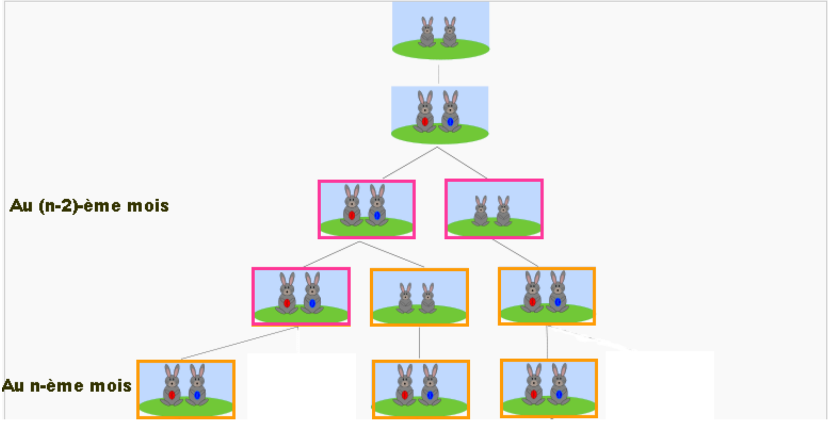


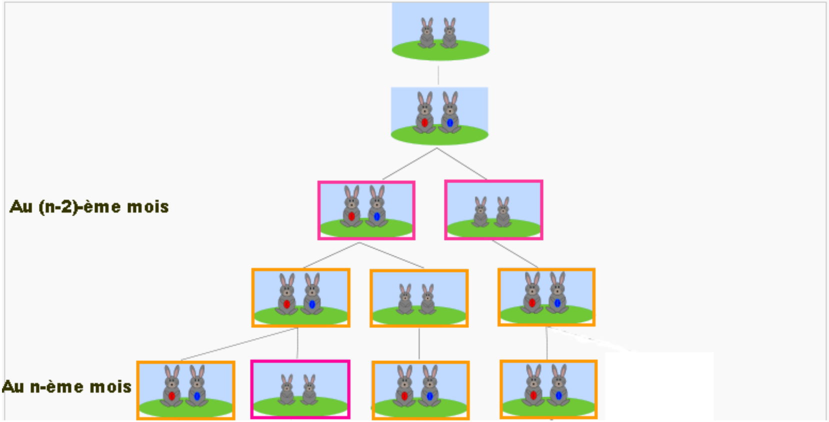
Ensuite, on trouve tous les nouveaux lapereaux mis au monde par les lapins qui ont au moins deux mois d'existence, c'est-à-dire tous les lapins du $(n-2)$-ème mois.

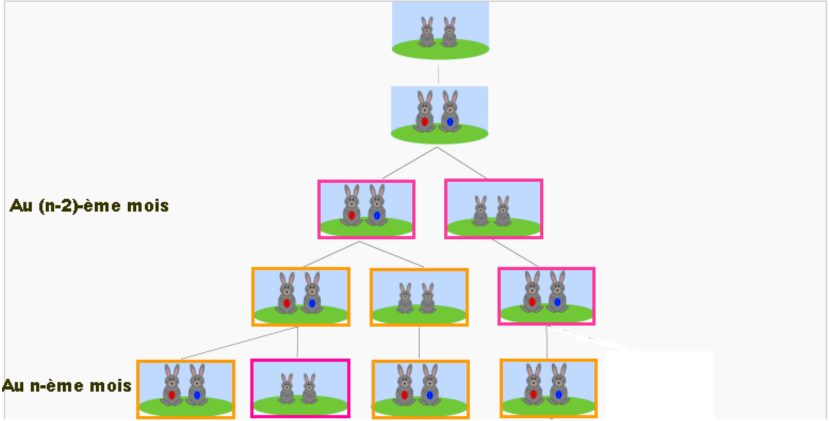
Ensuite, on trouve tous les nouveaux lapereaux mis au monde par les lapins qui ont au moins deux mois d'existence, c'est-à-dire tous les lapins du $(n-2)$-ème mois.

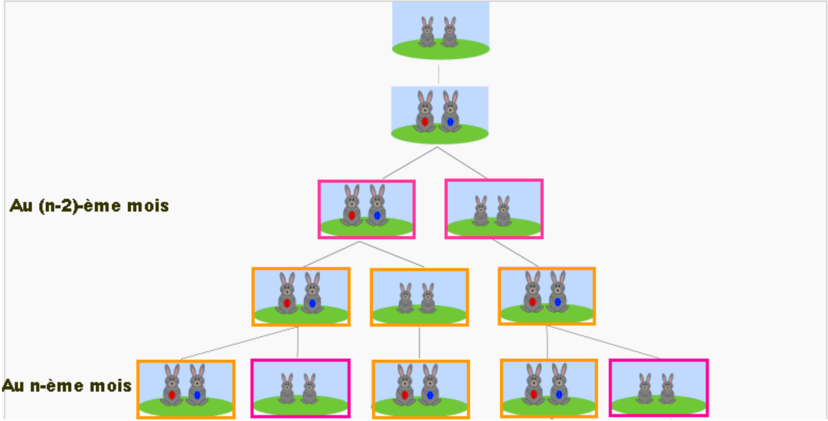



Au (n-2)-ème mois
Au n-ème mois

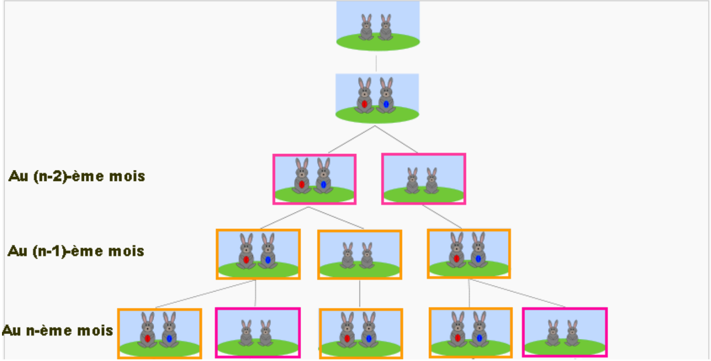

Au (n-2)-ème mois
Au n-ème mois

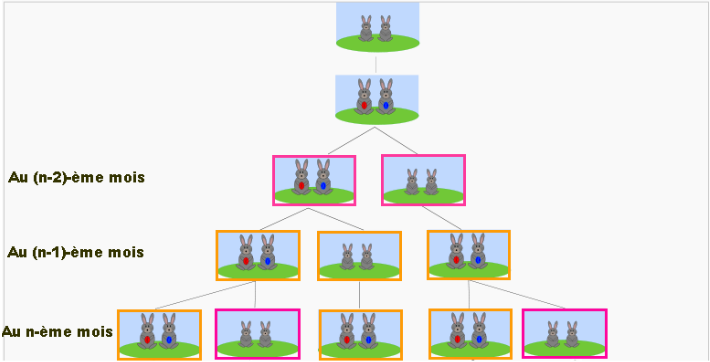

Au (n-2)-ème mois
Au n-ème mois


Au (n-2)-ème mois
Au n-ème mois


Au (n-2)-ème mois
Au n-ème mois

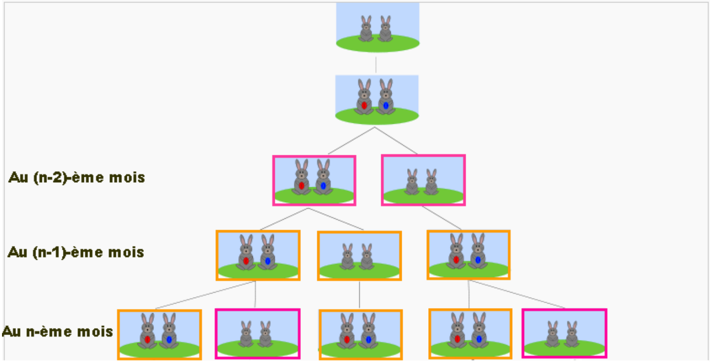
La relation de récurrence





On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

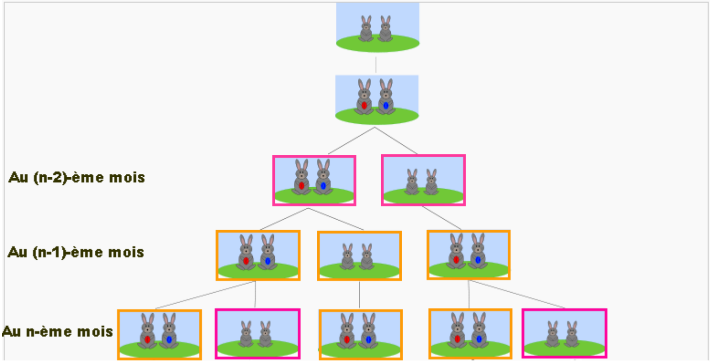
$$\mathcal{F}_n =$$



On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1}$$

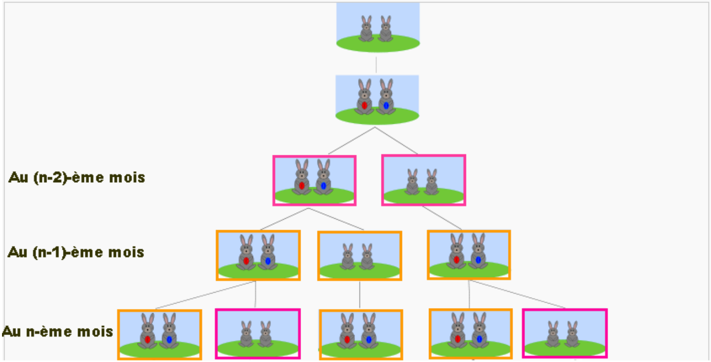
La relation de récurrence



On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} +$$

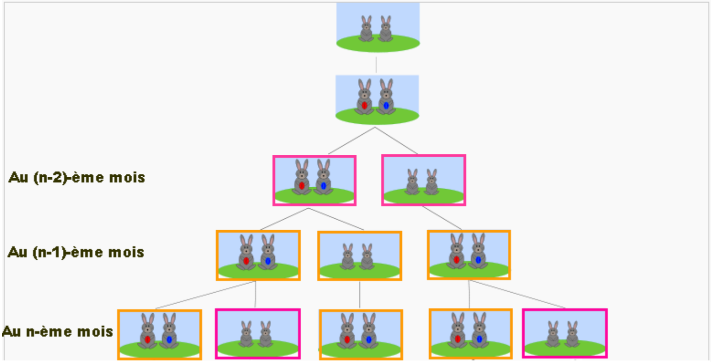
La relation de récurrence



On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

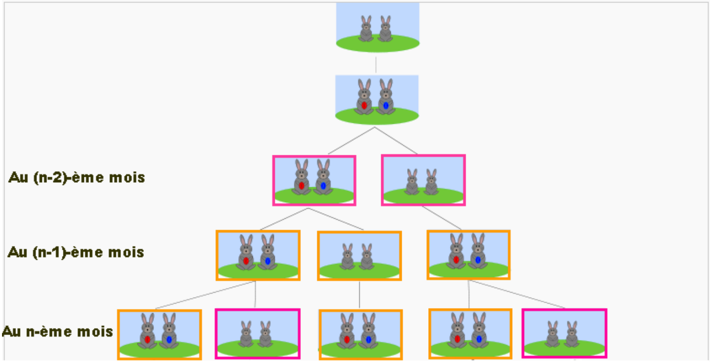
$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$$

La relation de récurrence



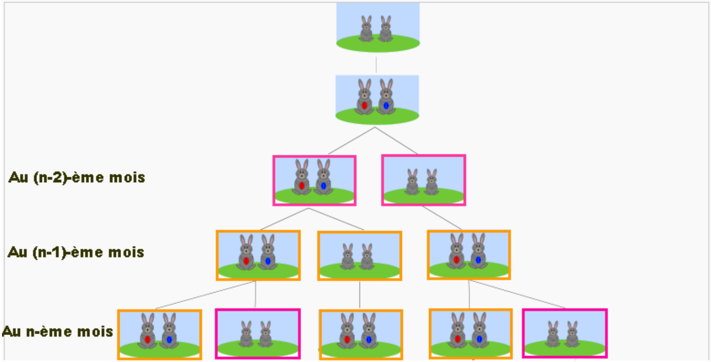
On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 =$$



On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

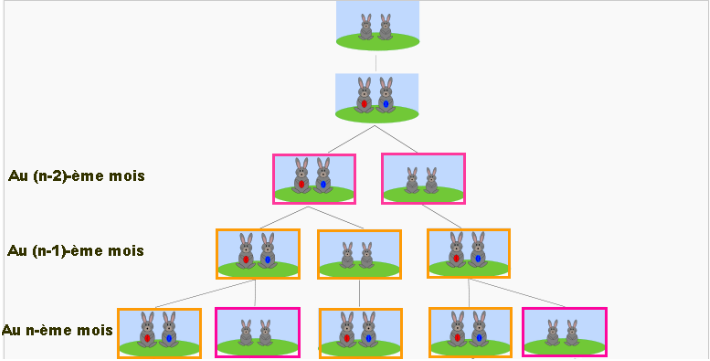
$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1$$



On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 =$$

La relation de récurrence



On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\mathcal{F}_3 =$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_2 +$$

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1\\ &= 1 + 1\\ &= 2\end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\mathcal{F}_4 =$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_3$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_3 +$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1\\ &= 1 + 1\\ &= 2\end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_2\\ &= \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_2 \\ &= 2 +\end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_2 \\ &= 2 + 1 \\ &= \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 3-ème et au 4-ème mois

Donc le nombre de couples de lapins au troisième mois vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Au 4-ème mois, le nombre de couples de lapins vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_2 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 =$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 =$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 = 3 + 2 =$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons. . . Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 = 3 + 2 = 5$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 = 3 + 2 = 5$$

Puis au 6-ème mois :

$$\mathcal{F}_6 =$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 = 3 + 2 = 5$$

Puis au 6-ème mois :

$$\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_4 =$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 = 3 + 2 = 5$$

Puis au 6-ème mois :

$$\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_4 = 5 + 3 =$$

Nombre de lapins au 5-ème et au 6-ème mois

Continuons... Le nombre de couples de lapins au 5-ème mois est

$$\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3 = 3 + 2 = 5$$

Puis au 6-ème mois :

$$\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_4 = 5 + 3 = 8$$

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1							

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2						

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3					

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5				

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8			

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13		

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1}$

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} +$

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\ldots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	...	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	...	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

Réponse à la question de Fibonacci :

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

Réponse à la question de Fibonacci :

$$\mathcal{F}_{12} =$$

Combien y a-t-il de couples de lapins au 7-ème mois ?

Contemplons une dernière fois la suite « des lapins de Fibonacci » :

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	...	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	...	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

Réponse à la question de Fibonacci :

$$\mathcal{F}_{12} = 144$$

La relation de récurrence

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$$

La relation de récurrence

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1$$

La relation de récurrence

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1$$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1							

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2						

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3					

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5				

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8			

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13		

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	...	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	...	

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\ldots$	$\mathcal{F}_{n-1}$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\ldots$	$\mathcal{F}_{n-1} +$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1$$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\ldots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\ldots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

il semble que la suite ne soit composée que d'entiers naturels...

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

il semble que la suite ne soit composée que d'entiers naturels... preuve ?

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

il semble que la suite ne soit composée que d'entiers naturels... preuve ?
il semble que deux termes consécutifs de la suite soient des entiers premiers entre eux... preuve ?

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

il semble que la suite ne soit composée que d'entiers naturels... preuve ?
il semble que deux termes consécutifs de la suite soient des entiers premiers entre eux... preuve ?

On montre que $\mathcal{F}_{n+1} \times \mathcal{F}_{n-1} - {\mathcal{F}_n}^2 = (-1)^n$

donc avec le théorème de

On a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ avec } \mathcal{F}_1 = 1 \text{ et } \mathcal{F}_2 = 1.$$

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$	$\mathcal{F}_5$	$\mathcal{F}_6$	$\mathcal{F}_7$	$\dots$	$\mathcal{F}_n$
1	1	2	3	5	8	13	$\dots$	$\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$

il semble que la suite ne soit composée que d'entiers naturels... preuve ?
il semble que deux termes consécutifs de la suite soient des entiers premiers entre eux... preuve ?

On montre que $\mathcal{F}_{n+1} \times \mathcal{F}_{n-1} - {\mathcal{F}_n}^2 = (-1)^n$

donc avec le théorème de Bézout, on en déduit que $\mathcal{F}_{n+1}$ et $\mathcal{F}_n$ sont premiers entre eux.

On s'intéresse à la résolution du problème général : comment trouver l'expression du terme général de $\mathcal{F}_n$ en fonction de n.

On s'intéresse à la résolution du problème général : comment trouver l'expression du terme général de $\mathcal{F}_n$ en fonction de n.

On pose la matrice $U_n = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$; alors $U_{n+1} =$

On s'intéresse à la résolution du problème général : comment trouver l'expression du terme général de $\mathcal{F}_n$ en fonction de n.

On pose la matrice $U_n = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$; alors $U_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$

On s'intéresse à la résolution du problème général : comment trouver l'expression du terme général de $\mathcal{F}_n$ en fonction de n.

On pose la matrice $U_n = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$; alors $U_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$

On cherche une matrice A de type 2×2 telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

On s'intéresse à la résolution du problème général : comment trouver l'expression du terme général de $\mathcal{F}_n$ en fonction de n.

On pose la matrice $U_n = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$; alors $U_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$

On cherche une matrice A de type 2×2 telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

On veut donc que

$$\begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$$

Il suffit donc de prendre $a =$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

On veut donc que

$$\begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$$

Il suffit donc de prendre $a = 0$; $b =$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

On veut donc que

$$\begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$$

Il suffit donc de prendre $a = 0$; $b = 1$; $c =$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

On veut donc que

$$\begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$$

Il suffit donc de prendre $a = 0$; $b = 1$; $c = 1$ et $d =$

$$A \times U_n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n \\ \mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

On veut donc que

$$\begin{bmatrix} a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n+1} \\ c\mathcal{F}_n + d\mathcal{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{n+1} \\ \mathcal{F}_{n+2} \end{bmatrix}$$

Il suffit donc de prendre $a = 0$; $b = 1$; $c = 1$ et $d = 1$.

On a une matrice A constante

On a une matrice A constante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

On a une matrice A constante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

Cette suite est du type géométrique : $U_{n+1} = A\,U_n$

On a une matrice A constante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

Cette suite est du type géométrique : $U_{n+1} = A\,U_n$ donc pour tout $n \geq 1$ on a $U_n =$

On a une matrice A constante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.
Cette suite est du type géométrique : $U_{n+1} = A\,U_n$ donc pour tout $n \geq 1$ on a $U_n = A^{n-1}\,U_1$.

Avec $U_1 =$

On a une matrice A constante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

Cette suite est du type géométrique : $U_{n+1} = A\,U_n$ donc pour tout $n \geq 1$ on a $U_n = A^{n-1}\,U_1$.

Avec $U_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

On a une matrice A constante $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $U_{n+1} = A\,U_n$.

Cette suite est du type géométrique : $U_{n+1} = A\,U_n$ donc pour tout $n \geq 1$ on a $U_n = A^{n-1}\,U_1$.

Avec $U_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

On est donc amené à calculer les puissances de la matrice A...

On est donc amené à calculer les puissances de la matrice A...

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Conclusion :

On est donc amené à calculer les puissances de la matrice A...

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Conclusion : Il n'y a pas de forme "simple" qui se dégage...

Il n'y a pas de forme "simple" qui se dégage...

Il n'y a pas de forme "simple" qui se dégage... donc on va essayer de "simplifier" le problème du calcul des puissances...

Il n'y a pas de forme "simple" qui se dégage... donc on va essayer de "simplifier" le problème du calcul des puissances...

On sait que si D est diagonale : $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ alors

D^n

Il n'y a pas de forme "simple" qui se dégage... donc on va essayer de "simplifier" le problème du calcul des puissances...

On sait que si D est diagonale : $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ alors $D^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix}$

S'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$

S'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ alors

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) =$$

S'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ alors

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} =$$

S'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ alors

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

S'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ alors

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

Par récurrence, on a $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$, et D^n est très simple à calculer dès que D est diagonale.

Trouver D et trouver P c'est diagonaliser la matrice A, c'est à dire l'écrire comme produit d'une matrice inversible P par une matrice diagonale D :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

L'ordinateur trouve que :

$$\mathcal{F}_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$