R. Mansuy

Exercices pour la $\mathbb{MPSI}_2$

2008-2009

Lycée Louis le Grand
123 rue Saint Jacques
75005 Paris

$\mathbb{MPSI}_2$ **0**

Avant-Propos

Labor improbus omnia vincit
Virgile

Ce document, destiné à la classe de $\mathbb{MPSI}_2$ du lycée Louis le Grand pour l'année 2008/2009, rassemble la plupart des exercices proposés en classe. En fonction des besoins de la classe, certains exercices ne seront pas traités et d'autres seront ajoutés. Il convient de préciser quelques conseils méthodologiques :

- Avant de se lancer dans les exercices, il est nécessaire de connaître le contenu du cours (résultats, démonstrations mais aussi exemples et applications).
- Pour les calculs, l'utilisation de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel peut être utile mais ne remplace pas le calcul effectif.

  Vous trouverez quelques rappels de Maple tout au long du volume.
- Certains exercices sont plus difficiles et il peut arriver que vous ne sachiez pas les résoudre en un temps raisonnable. Avant d'abandonner un exercice, vous devez dresser la liste des points de cours correspondant à l'énoncé et dresser la liste des idées que vous avez eues en détaillant pourquoi elles ne permettent pas de conclure.
- Il peut rester des erreurs d'énoncé. Si jamais vous pensez en avoir trouvé une, manifestez-vous auprès de vos camarades pour vérifier vos doutes puis faites m'en part (en classe, sur le forum `http://hx2torch.free.fr` ou sur mon adresse électronique `roger.mansuy@gmail.com`).

R.M.

Table des matières

Partie II Algèbre

Annexes

Première partie

Révisions et Compléments

MPSI$_2$ **1**

Ensembles et logique élémentaire

1.1 Logique élémentaire

Exercice 1 *Nier les propositions suivantes :*

1. *Si vous n'apprenez pas le cours, vous n'aurez pas de bons résultats.*
2. *Vous faites du sport et des mathématiques.*
3. $$P \quad \Rightarrow \quad (Q \quad ou \quad R)$$
4. $$\forall A>0, \quad \exists \eta>0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \qquad |f(x)| \geq A$$

Exercice 2 *Considérons les deux propositions suivantes :*
(f admet une limite finie en a) :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon>0, \quad \exists \eta>0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \qquad |f(x)-l| \leq \varepsilon$$

(f tend vers $+\infty$ en a) :

$$\forall A>0, \quad \exists \eta>0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \qquad f(x) \geq A$$

1. *Montrer, par contraposition, que si f admet une limite finie en a alors f ne tend pas vers $+\infty$ en a.*
2. *Reprendre la question précédente en raisonnant par l'absurde.*

Exercice 3 *Une fonction f (définie sur $\mathbb{R}$) admet la limite l en a si*

$$\forall \varepsilon>0, \quad \exists \eta>0, \quad \forall x \in]a-\eta, a+\eta[, \qquad |f(x)-l| \leq \varepsilon$$

Montrer l'unicité de la limite de f en a.

1.2 Manipulations d'ensembles

Exercice 4 *Soient x et y deux éléments distincts. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x,y\}))$.*

Exercice 5 *Soient A et B deux ensembles. Montrer que $A \cap B = A \cup B$ si et seulement si $A = B$.*

Exercice 6 *Soient trois ensembles A, B et C tels que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Établir $B = C$.*

Exercice 7 *Soient A et B deux parties de E. Définissons $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par*

$$\varphi(X) = (A \cap X, B \cap X)$$

1. *Montrer que φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$*
2. *Trouver une CNS pour que φ soit surjective.*
3. *On suppose que φ est bijective. Calculer φ^{-1}.*

Exercice 8 *Soit E un ensemble.*

1. *Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.*
2. *Montrer par l'absurde qu'il n'existe par de surjection $f : E \to \mathcal{P}(E)$ en étudiant les antécédents de la partie $X = \{x \in E| \quad x \notin f(x)\}$.*
3. *Conclure qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.*

1.3 Images directes et réciproques

Exercice 9

1. *Soit $f : (p, q) \in \mathbb{N}^2 \to p + q$. Déterminer $f(\mathbb{N} \times \{0\})$, $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(2\mathbb{N})$.*
2. *Soit $f : x \in \mathbb{R} \to (x, 2x) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R}^+)$, $f^{-1}(\mathbb{R} \times \{0\})$ et $f^{-1}(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x$.*

Exercice 10 *Soient $f : E \to F$ et A, B deux parties de E.*

1. *Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.*
2. *Montrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; établir que, si f est injective, alors cette relation est une égalité.*
   Trouver un exemple d'inclusion stricte (quand f n'est pas injective).

Exercice 11 *Soient f une application de E dans F et A et B deux parties de F. Montrer que :*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \qquad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \qquad f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$$

Exercice 12 *Soient f une application de E dans F, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :*

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B$$

Établir les cas d'égalité.

Exercice 13 *Soit f une application de E dans F. Établir l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *f est surjective*
2. *$\forall y \in F \qquad f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$*
3. *$\forall Y \subset F \qquad f(f^{-1}(Y)) = Y$*
4. *$\forall Y \subset F \qquad f^{-1}(Y) = \emptyset \Rightarrow Y = \emptyset$*

1.4 Ensembles ordonnés

Exercice 14 *Considérons $\prec$ la relation binaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$(x, y) \prec (x', y') \qquad \Leftrightarrow \qquad |x' - x| \leq y' - y$$

1. *Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre. Est-il total ?*

2. *Montrer que la borne supérieure de* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ *est* $(0, \sqrt{2})$.

Exercice 15 *Soit* $\otimes$ *une loi de composition interne commutative et associative sur* E*, telle que :*

$$\forall\ x \in E,\ x \otimes x = x$$

Définissons la relation $\prec$ *sur* E *par :* $x \prec y \Leftrightarrow x \otimes y = x$.

1. *Reconnaître* $\prec$ *lorsque* $\otimes$ *est l'intersection sur* $\mathcal{P}(X)$.
2. *Montrer que* $\prec$ *est une relation d'ordre.*
3. *Montrer que :*
$$\forall\ x, y \in E, \qquad x \otimes y = \inf(x,y)$$

Exercice 16 *Soit* E *un treillis, c'est-à-dire un ensemble ordonné* E *dans lequel pour tous* $x, y \in E$, $\sup(x,y)$ *et* $\inf(x,y)$ *existent.*

1. *Montrer que* $\sup$ *et* $\inf$ *sont des lois de composition internes associatives.*
2. *À quelle condition admettent-elles des éléments neutres ?*
3. *Montrer que, pour tout* $x, y, z \in E$ *:*

$$x \leq z \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sup(x, \inf(x,y)) = \inf(x, \sup(x,y)) = x \\ \sup(x, \inf(y,z)) \leq \inf(\sup(x,y), z) \\ \inf(x, \sup(y,z)) \geq \sup(\inf(x,y), \inf(x,z)) \end{cases}$$

Exercice 17 *Soit* E *un ensemble ordonné tel que toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.*
Montrer que toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

1.5 Raisonnement par récurrence

Exercice 18 *Définissons, pour tout entier* $n \geq 3$*, la propriété* $\mathcal{P}_n$ *:*

$$\text{"il existe } (u_1, ..., u_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \text{ tel que } u_1 < u_2 < ... < u_n \text{ et } 1 = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{u_k}\text{"}$$

1. a) *Supposons qu'il existe* $(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *tel que* $u_1 < u_2 < u_3$ *et* $1 = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3}$.
      i. *Montrer que* $u_1 < 3$ *; en déduire la valeur de* u_1.
      ii. *Trouver les valeurs de* u_2 *et* u_3.
   b) *En déduire qu'il existe un unique triplet* $(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *vérifiant* $\mathcal{P}_3$.
2. *En s'inspirant de la question précédente, montrer que* $\mathcal{P}_4$ *est vraie et trouver tous les quadruplets qui satisfont cette propriété.*
3. *Démontrer, par récurrence,que la propriété* $\mathcal{P}_n$ *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 *Montrer que, pour tout* $n \geq 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 20 *Calculer* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}$ *pour tout* $(p, n) \in \mathbb{N}^2$.

1.6 Dénombrement

Exercice 21 *Dénombrer les permutations de* $\mathfrak{S}_{20}$ *dont la décomposition en cycle de supports disjoints contient trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes.*

Exercice 22 *Soit* E *un ensemble de cardinal* n*. Dénombrer les lois de compositions internes sur* E*. Recommencer la question en ne comptant que les lois de composition interne commutatives, puis que les lois de composition interne commutatives admettant un élément neutre.*

Exercice 23 *Soient* n *dans* $\mathbb{N}^*$ *et* E *un ensemble fini à* n *éléments.*
Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ *tel que* $X \subset Y$*.*

Exercice 24 *Soient* A *et* B *deux parties d'un ensemble* E *telles que* A *soit finie. Dénombrer les parties* X *de* E *telles que* $A \cup X = B$*.*

Exercice 25 *Soit* E *un ensemble de cardinal* $n > 0$*.*

1. *Dénombrer les couples* (A, B) *de parties de* E *tels que :*
   a) $A \cap B = \varnothing$
   b) $A \cup B = E$
2. *Dénombrer les triplets* (A, B, C) *de parties de* E *tels que* $A \cup B \cup C = E$*.*

Exercice 26 *Soit* E *un ensemble à* n *éléments. Dénombrer :*

1. *le nombre de parties de cardinal pair.*
2. *le nombre de parties de cardinal impair.*
3. *le nombre de parties de cardinal multiple de 3.*
   INDICATION: *on pourra calculer* $(1+1)^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$ *(avec* $j = \exp(2i\pi/3)$*) de deux manières différentes.*

Exercice 27 *Soit* E *un ensemble fini de cardinal* n*. Calculer les sommes suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} card(X)$
2. $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} card(X \cap Y)$

Exercice 28 *Pour tout ensemble fini* E *de cardinal* n*, on définit* u_n*, le nombre d'involution de* E*, i.e. d'applications* f *de* E *dans* E *telles que* $f \circ f = Id_E$*.*

1. *Calculer* u_1*,* u_2 *et* u_3*.*
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, montrer que* $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$

Exercice 29 *(Nombres de Catalan) Soit* E *un ensemble muni d'une loi non-associative* $\star$*. Notons, pour tout entier naturel non nul* n*,* u_n *le nombre de parenthésages du produit* $a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_n$ *en produit de deux éléments. On pose* $u_1 = u_2 = 1$*.*

1. *Calculer* u_3*,* u_4 *et* u_5*.*
2. *Montrer que, pour tout entier* $n \geq 1$*,* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k u_{n-k}$

Exercice 30
1. *Considérons cinq points du plan à coordonnées entières. Montrer qu'au moins un des milieux de ces couples de points est à coordonnées entières.*
2. *Montrer que cette propriété n'est plus valable avec seulement quatre points du plan.*
3. *Combien faut-il de points de l'espace à coordonnées entières pour s'assurer qu'un des milieux est à coordonnées entières ?*

Exercice 31 *Dénombrer les permutations* $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ *telles que* $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n)$ *et* $\sigma(2n) < \sigma(2n-1) < \ldots < \sigma(n)$*.*

MPSI$_2$ **2**

Corps des nombres complexes

2.1 Calculs élémentaires

Exercice 32 *Calculer*

1. $(1+i)^n$
2. $(i-\sqrt{3})^n$
3. $(1+i\tan(\theta))^n$
4. $(1-\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$

Maple>`evalc((1+I)^n);`

$$e^{\left(\frac{1}{2}n\ln 2\right)}\cos\left(\frac{1}{4}n\pi\right)+Ie^{\left(\frac{1}{2}n\ln 2\right)}\sin\left(\frac{1}{4}n\pi\right)$$

Exercice 33 1. *Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.*

2. *Démontrer que :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1}=\frac{i-ni^n-(n+1)i^{n+1}}{2}$$

3. *En déduire, pour tout entier p, les sommes $S_I=1-3+5-7+\cdots+(-1)^p(2p+1)$ et $S_P=2-4+6-8+\cdots+(-1)^{(p+1)}2p$.*

Exercice 34 *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+i)^k$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$
4. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\cos(k\theta)}{\cos^k(\theta)}$

Exercice 35 *Calculer, pour tout entier naturel n non-nul, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$ et $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}$*

Exercice 36 *Établir les deux formules suivantes :*

$$\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\qquad\qquad \sin(3\theta)=3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)$$

En déduire une primitive des fonctions $x\mapsto\cos^3(x)$ et $x\mapsto\sin^3(x)$.

Exercice 37 1. *Montrer que :*

$$\forall\ \theta\in]-\pi,\pi[,\qquad |e^{i\theta}-1|\leq|\theta|$$

2. *En déduire que, pour tout z complexe non nul d'argument principal θ, on a :*

$$|z-1| \leq ||z|-1| + |z\theta|$$

3. *Interpreter géométriquement cette dernière inégalité.*

Exercice 38 *Soient $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que :*

$$\frac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad |u| = 1$$

Exercice 39 *Soient z et z' deux complexes. On considère u un complexe tel que $u^2 = zz'$. Etablir la relation : $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$*

Exercice 40 *Soient $z_1, .., z_n$ n nombres complexes*

1. *Montrer que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |z_k|$.*
2. *A quelle condition a-t-on égalité dans la question précédente ?*
   INDICATION: *on pourra commencer par le cas $n = 2$.*

Exercice 41 *(lemme de confinement)*

1. *Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1, alors $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{3}$ ou $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{3}$.*
2. *En déduire, par récurrence, que pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$ de module inférieur ou égal à 1, il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tel que*

$$\forall p \leq n, \qquad |\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_p z_p| \leq \sqrt{3}$$

2.2 Équations algébriques

Exercice 42 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $(1+i)z^2 - z - 1 + i = 0$
2. $(z^2 - z - 1)^2 + (z^2 + 1)^2 = 0$
3. $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$
4. $z^4 - 2z^2 \cos(\theta) + 1 = 0$
5. $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
6. $z^n = \overline{z}$

```
MAPLE>solve(z^ 3-(3+2*I)*z^ 2+(3+11*I)*z-2*(1+7*I),z);
```

$$-1+3I, 2-I, 2$$

Exercice 43 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation*

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

Exercice 44 *Déterminer les racines cubiques de $\sqrt{3} - i$ et de $\frac{2i+\sqrt{3}}{2i-\sqrt{3}}$.*

Exercice 45 *Résoudre l'équation $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = 0$.*

Exercice 46 *Résoudre l'équation $1 + \left(\frac{i-z}{i+z}\right) + \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^2 + \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^3 + \left(\frac{i-z}{i+z}\right)^4 = 0$.*

Exercice 47 *Soit θ tel que $-\pi < \theta \leq \pi$; posons $\alpha = e^{i\theta}$ et considérons l'équation*

$$z^2 - 2\alpha z + 1 = 0$$

dont les racines seront notées z_1 et z_2 (que l'on ne calculera pas).

1. *Donner les valeurs de θ pour lesquelles z_1 et z_2 sont réels (resp. imaginaires purs). Pour chaque valeur obtenue donner les valeurs correspondantes de z_1 et z_2.*
2. *Calculer le module et un argument de $z_1 - \alpha$ et de $z_2 - \alpha$.*
   INDICATION: *on pourra calculer la somme et le produit de ces nombres.*
   On suppose dorénavant : $0 \leq \theta \leq \pi$
3. *Montrer que $z_1 + i$ et $z_2 + i$ ont les mêmes arguments que l'on déterminera.*
4. *Montrer que $z_1 - i$ et $z_2 - i$ ont le même module que l'on calculera.*

2.3 Applications à la géométrie

Exercice 48 *Déterminer les points du plan dont l'affixe z vérifie les relations suivantes :*

1. *les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral.*
2. *les points d'affixes z, z^2 et z^5 sont alignés.*
3. *les points d'affixes 1, z, $1-z$ et $1/z$ sont cocycliques.*

Exercice 49 *Soient trois points A, B et C d'affixes respectives $a, b, c \in \mathbb{C}$. Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ABC en fonction de a, b, c.*

Exercice 50 *Soit a un réel et A, B les points d'affixes $-a$ et a. Dans la suite, on note z l'affixe du point M.*

1. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left|\frac{z-a}{z+a}\right| = k > 0$.*
2. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{z-a}{z+a}$ ait pour argument θ modulo π.*

Exercice 51 *Reconnaître la transformation du plan complexe*

$$z \mapsto (\sqrt{3} - i)z - 2 + 2i(1 - \sqrt{3})$$

Exercice 52 *Écrire l'affixe z' du point M' image du point M d'affixe z par :*

1. *la rotation de centre $(0, 1)$ et d'angle $2\pi/3$.*
2. *l'homothétie de centre $(1, 1)$ et de rapport 4.*
3. *la similitude directe de centre $(1, 0)$, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$.*

Exercice 53 *Considérons* $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \to & \mathbb{C} \\ z \mapsto & \frac{1}{4}z + \frac{1}{4} \end{cases}$

1. *Montrer qu'il existe un unique point fixe pour φ, que l'on notera z_0.*
2. *Montrer que, pour tout complexe $z \neq z_0$, les points d'affixe z_0, z et $\varphi(z)$ sont alignés.*

2.4 Racines de l'unité

Exercice 54 *On pose $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \left|\zeta^k - 1\right|$*

Exercice 55 *Soit n un entier naturel non nul. Posons $\zeta = e^{2i\pi/n}$.*
Montrer que, pour tout complexe z, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (z + \zeta^k)^n = n(z^n + 1)$$

Exercice 56 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Calculer selon les valeurs de l'entier* k, $\sum\limits_{z \in \mathbb{U}_n} z^k$.
2. *Soit* P *un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à* $n-1$ *et* $M = \max\{|P(z)|,\ z \in \mathbb{U}_n\}$.
   Montrer que tous les coefficients de P *sont bornés par* M.

Exercice 57 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ *et* $Z = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \zeta^{k^2}$. *Calculer* $|Z|^2$.

Résultat: *Si* n *est impair,* $|Z|^2 = n$ *; sinon* $|Z|^2 = n(1 + (-1)^{\frac{n}{2}})$.

2.5 Applications à variable complexe

Exercice 58 *Soient* $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } Im(z) > 0\}$ *et* $D = \{z \in \mathbb{C},\ \text{tel que } |z| < 1\}$.

1. *Montrer que, si* $z \in \Pi$, *alors* $\frac{z-i}{z+i} \in D$.
2. *Montrer que l'application*
$$f : \begin{cases} \Pi & \rightarrow & D \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{cases}$$
   est une bijection puis calculer sa réciproque.

Exercice 59 *Soit* $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *définie par* $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$

1. *Montrer que* f *est une bijection.*
2. *Déterminer* $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$, $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Exercice 60 *Montrer que la fonction* f *du plan complexe définie pour tout* z *par* $f(z) = z.e^z$ *est surjective de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$.

Indication: *on pourra commencer par résoudre* $e^u + u = a + ib$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $-\pi \leq b \leq \pi$.

MPSI$_2$ 3

Fonctions usuelles

3.1 Bijections

Exercice 61 *Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont bijectives et le cas échéant trouver la bijection réciproque :*

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$
5. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$
6. $f : \begin{cases} [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$
7. $f : \begin{cases} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$
8. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{x-1}{x-2} \end{cases}$
9. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-1}{x-2} \end{cases}$

Exercice 62 *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par*

$$g(x) = x + \ln(x)$$

1. *Étudier g. Montrer que g possède une fonction réciproque f, strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $x - \ln x \leqslant f(x) \leqslant x$ pour tout $x > 1$.*
   En déduire que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. *On considère la fonction $h(x) = f(x) - (x - \ln x)$.*
   Montrer que $\dfrac{h(x)}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis que $h(x) = -\ln(1 + \dfrac{h(x)}{x} - \dfrac{\ln x}{x})$.
   En déduire la limite de h en $+\infty$ puis l'asymptote à la courbe représentative de h en $+\infty$
4. *Tracer l'allure des courbes représentatives de f et g.*

Exercice 63 *Soit la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}}$.*
Montrer qu'elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

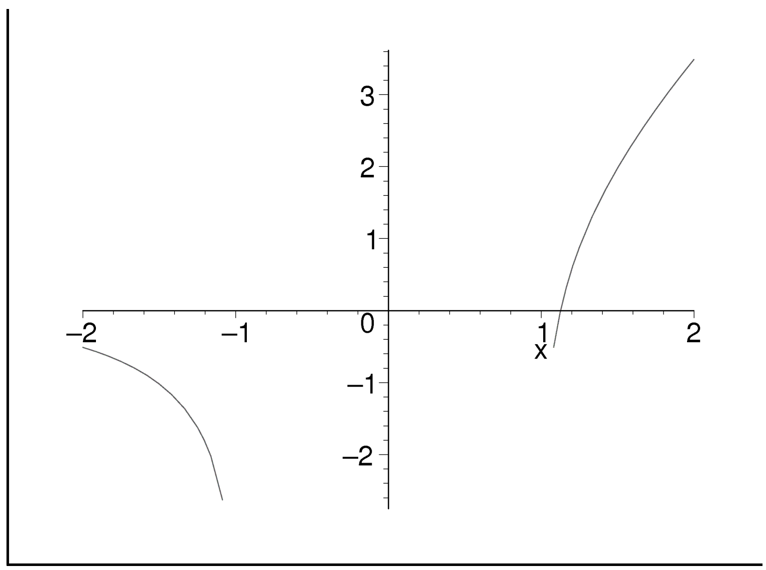
3.2 Fonctions polynômiales, exponentielles, logarithmes

Exercice 64 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\ln(x) = \ln(2) + \ln(2\sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$
2. $\ln(x^2 - 1) = \ln(2 - x) + \ln(3 - x)$
3. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
4. $e^x - e^{-x} = \sqrt{5}$
5. $e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} = 0$

Exercice 65 *Étudier la fonction* $x \mapsto \ln(e^{2x} - 2\text{ch}(1)e^x + 1)$

```
MAPLE>plot(ln(exp(2*x)-2*cosh(1)*exp(x)+1),x=-2..2);
```



Exercice 66 *1. Trouver un polynôme* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\sin 3x = \sin x Q(\cos x)$

2. *Résoudre l'équation* $\sin 2x = \sin 3x$.
3. *En déduire les valeurs de* $\cos \dfrac{\pi}{5}$ *et* $\cos \dfrac{3\pi}{5}$, *puis celle de* $\cos \dfrac{2\pi}{5}$.
4. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* P_n *et* Q_n *deux polynômes tels que* $\cos nx = P_n(\cos x)$ *et* $\sin nx = (\sin x)Q_n(\cos x)$.

3.3 Fonctions circulaires

On pourra en profiter pour réviser les formules de trigonomètrie (voir Annexe B).

Exercice 67 *Donner le domaine de définition, de dérivation puis étudier des fonctions suivantes :*

1. $x \mapsto \sin(\arcsin(x))$
2. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$
3. $x \mapsto \tan(\arctan(x))$
4. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
5. $x \mapsto \cos(\arctan(x))$
6. $x \mapsto \tan(\arcsin(x))$

Exercice 68 *Simplifier les expressions suivantes :*

1. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$
2. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\arccos\left(\cos 4\pi\right)$
4. $\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$
5. $\tan(\arcsin x)$
6. $\sin(\arccos x)$
7. $\cos(\arctan x)$

```
MAPLE>simplify(arccos(cos(-2*Pi/3)));
```

$$\frac{2}{3}\pi$$

Exercice 69 *Comparer les expressions suivantes :*

1. $\arcsin\sqrt{x}$ *et* $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$
2. $\arcsin x+\arcsin\sqrt{1-x^2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$
3. $2\arcsin x$ *et* $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Exercice 70 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\arctan x+\arctan(2x)=\frac{\pi}{4}$
2. $\arcsin(2x)=\arcsin x+\arcsin(\sqrt{2}x)$

Exercice 71 *Soit f la fonction définie par* $f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

1. *Quel est le domaine de définition de f ?*
2. *Calculer $f'(x)$ selon que $|x|>1$ ou $|x|<1$.*
3. *Montrer que sur $[-1,1]$, $x\mapsto f(x)-2\arctan(x)$ est constante.*
4. *Montrer que sur $]-\infty,1]$ et sur $[1,+\infty[$, $x\mapsto f(x)+2\arctan(x)$ est constante.*
5. *Étudier f.*

Exercice 72 *Étudier les fonctions*

1. $x\mapsto\arccos(\frac{1-x}{1+x})+\arcsin(\frac{\sqrt{2}x}{1+x})$
2. $x\mapsto\arccos(1-x^2)$

Exercice 73 *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=\arcsin(3x-4x^3)$.*
Simplifier l'expression de $f(x)$ en posant $x=\sin(t)$.

Exercice 74 *Montrer que :*

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } xy\neq 1,\qquad \arctan x+\arctan y=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+k\pi$$

$$\text{avec } k=\begin{cases}0 & \text{si } xy<1\\ 1 & \text{si } xy>1 \text{ et } x>0\\ -1 & \text{si } xy>1 \text{ et } x<0\end{cases}$$

Exercice 75 *Exprimer les solutions de l'équation* $\tan(3\arcsin x)=1$ *à l'aide de radicaux.*

Exercice 76 *Calculer* $\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8$ *et* $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3$.

Exercice 77 *Soient p et q deux entiers tels que $0<p<q$.*

1. *Calculer* $\arctan\dfrac{p}{q}+\arctan\dfrac{q-p}{q+p}$.
2. *Calculer* $4\arctan\dfrac{1}{5}$.

3. Déduire des questions précédentes la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Exercice 78 *Démontrer la formule*

$$\frac{\pi}{4} = 6\arctan\frac{1}{8} + 2\arctan\frac{1}{57} + \arctan\frac{1}{239}$$

```
MAPLE>(8+I)^ 6*(57+I)^ 2*(239+I);;

                    150837781250+150837781250*I
```

3.4 Fonctions hyperboliques

Exercice 79 *Calculer* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{ch}(kx)$, *et* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{sh}(kx)$.

Exercice 80 *Soit a et b deux réels. Calculer, pour tout entier n,* $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(a+kb)$.

Exercice 81 *Simplifier les expressions suivantes :*

1. $\frac{\mathrm{ch}(\ln x)+\mathrm{sh}(\ln x)}{x}$
2. $\mathrm{sh}^2 x\cos^2 y + \mathrm{ch}^2 x\sin^2 y$
3. $\mathrm{argsh}\frac{x^2-1}{2x}$
4. $\mathrm{argch}(2x^2-1)$
5. $\arctan(e^x) - \arctan\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)$
6. $\ln\sqrt{\frac{1+\mathrm{th}x}{1-\mathrm{th}x}}$

MPSI$_2$

4

Géométrie plane

4.1 Équations de droites

Exercice 82 *Soient A $(a,0)$ B $(0,b)$ et C (a,b) trois points du plan ramené à un repère orthonormé. Déterminer une équation de la droite passant par C et parallèle à AB. Même question avec la normale à AB passant par C.*

Exercice 83 *Déterminer les droites passant par le point $A(2,3)$ et tangentes au cercle d'équation*

$$x^2+y^2-2x+\frac{4}{5}=0$$

Exercice 84 *Considérons deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équation :*

$$ux+vy+c=0 \qquad u'x+v'y+c'=0$$

Notons I l'intersection de ces deux droites.

1. *Montrer que pour tout $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, l'ensemble d'équation $\alpha(ux+vy+c)+\beta(u'x+v'y+c')=0$ est une droite passant par I*
2. *Montrer que toute droite passant par I admet une équation de la forme précédente.*

Exercice 85 *Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale M' de $M(x,y)$ sur la droite d'équation $x-y=1$ puis celles de M'' symétrique orthogonal de M par rapport à cette même droite.*

Exercice 86 *Considérons deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations*

$$ux+vy+c=0 \qquad u'x+v'y+c'=0$$

Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}''$ symétrique orthogonale de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{D}$.

Exercice 87 *Pour tout réel a, on considère la droite $\mathcal{D}_a$ d'équation*

$$(1-a^2)x+2ay-4(a+2)=0$$

1. *Montrer qu'il existe un point Ω à la même distance de toutes les droites $\mathcal{D}_a$ pour tout $a\in\mathbb{R}$.*
2. *En déduire une courbe Γ dont l'ensemble des tangentes est exactement l'ensemble des droites $\mathcal{D}_a$ pour $a\in\mathbb{R}$.*

Exercice 88 *Considérons deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations normales*

$$\cos(\theta_1)x+\sin(\theta_1)y-\rho_1=0 \qquad \cos(\theta_2)x+\sin(\theta_2)y-\rho_2=0$$

Déterminer une équation normale des deux bissectrices.

4.2 Géométrie dans un triangle

Exercice 89 *Soient A, B, C trois points du plan d'affixe respective a, b, c. Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.*

Exercice 90 *Le plan étant muni d'un repère orthonormé, déterminer le lieu de l'orthocentre du triangle ABC lorsque les trois points A, B et C appartiennent à l'hyperbole d'équation $xy = k$ pour un réel $k \neq 0$.*

Exercice 91 *Déterminer le lieu du centre du cercle inscrit du triangle OMP avec O l'origine du repère, M un point du cercle de centre O et de rayon R et P le projeté de M sur l'axe des abscisses.*

Exercice 92 *Soit ABC un triangle d'angles α, β et γ.*

1. *Montrer que le barycentre de $(A, \tan(\alpha))$, $(B, \tan(\beta))$ et $(C, \tan(\gamma))$ est l'orthocentre du triangle ABC.*
2. *Montrer que le centre du cercle circonscrit de triangle ABC est l'orthocentre du triangle formé sur les milieux des côtés de ABC.*
   En déduire que le centre du cercle circonscrit est un barycentre de A, B et C avec des coefficients que l'on déterminera.
3. *Montrer que l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés.*

Exercice 93 *Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Notons G le centre de gravité du triangle ABC et $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.*

1. *Montrer que :*
$$GA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$
2. *Montrer que l'ensemble*
$$\left\{M \in \mathcal{P} | (b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0\right\}$$
   est la droite passant par le centre du cercle circonscrit à ABC et par G quand celle-ci est définie.

Exercice 94 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de rayon $\sqrt{2}$ et de centres respectifs $A(1, 0)$ et $A'(0, 1)$. Notons B et C les points communs à ces deux cercles.*
Donner une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

4.3 Lignes de niveau

Exercice 95 *Soit ABC un triangle ; déterminer les lignes de niveau des applications suivantes :*
- $M \mapsto < \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} > + < \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC} > + < \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA} >$
- $M \mapsto [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] + [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}] + [\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}]$

Exercice 96 *Soient n points du plan deux à deux distincts $A_1, ...A_n$ et un n-uplet $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 0$. Étudier les lignes de niveau de l'application*
$$M \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k MA_k^2$$

Exercice 97 *Considérons deux droites concourantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. A tout point M du plan, on associe M_1 et M_2 ses symétriques orthogonaux par rapport à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.*
Étudier les lignes de niveau de l'application $M \mapsto M_1M_2$.

Exercice 98 *Soit k un réel positif et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites concourantes.*

1. *Déterminer le lieu des points M satisfaisant*

$$d(M, \mathcal{D}) + d(M, \mathcal{D}') = k$$

2. *Déterminer le lieu des points M satisfaisant*

$$|d(M, \mathcal{D}) - d(M, \mathcal{D}')| = k$$

Exercice 99
1. *Considérons le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R et M un point du plan. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M et d'intersection non-vide avec $\mathcal{C}$. On note P et Q les points éventuellement confondus de cette intersection.*
Montrer que $< \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ} >= MA^2 - R^2$.
Dans la suite de l'exercice, cette quantité, indépendante du choix de la sécante $\mathcal{D}$, sera notée $p_{\mathcal{C}}(M)$.
2. *Considérons deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres différents.*
   a) *Montrer que l'ensemble des points M tels que $p_{\mathcal{C}_1}(M) = p_{\mathcal{C}_2}(M)$ est une droite orthogonale à la droite passant par les centres des cercles.*
   Cette droite sera appelée axe radical des deux cercles.
   b) *Montrer que, dans un repère bien choisi (axe des centres et axe radical), les cercles admettent pour équation*

$$x^2 + y^2 - 2a_1x + b = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2a_2x + b = 0$$

   A quelle condition sur b, les deux cercles sont-ils tangents ? d'intersection vide ?
   c) *Déterminer l'ensemble des cercles dont l'axe radical avec $\mathcal{C}_1$ est l'axe radical entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.*
   d) *Déterminer l'ensemble des cercles orthogonaux à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.*
   INDICATION: *On pourra traduire l'orthogonalité de deux cercles à l'aide du théorème de Pythagore.*

4.4 Autres

Exercice 100 *Soient $\mathcal{D}$ une droite et A et B deux points n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Trouver le minimum de l'application*

$$\begin{cases} \mathcal{D} \to & \mathbb{R} \\ M \mapsto & AM + BM \end{cases}$$

Exercice 101 *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini de points du plan tel que toute droite contenant deux points de $\mathcal{A}$ en contient au moins trois. Montrer par l'absurde que $\mathcal{A}$ est inclus dans une droite.*

MPSI$_2$ 5

Géométrie de l'espace

5.1 Produit vectoriel et produit mixte

Exercice 102 *Soit* $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ *une base de* $\mathbb{R}^3$. *Définissons trois vecteurs* $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ *et* $\overrightarrow{u}_3$ *de coordonnées* $(a,1,1)$, $(1,a,1)$ *et* $(1,1,a)$ *dans cette base.*

1. *Pour quelles valeurs du réel* a, *les vecteurs* $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ *et* $\overrightarrow{u}_3$ *forment-ils une base ?*
2. *Exprimer les vecteurs de la base* $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ *dans la base* $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$.

Exercice 103 *Montrer que pour tout* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}) \in (\mathbb{R}^3)^4$, *on a :*

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x}) = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x}]\overrightarrow{w} - [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\overrightarrow{x}$$

Exercice 104 *Montrer que pour tout* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}) \in (\mathbb{R}^3)^4$, *on a :*

$$< \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{x} > + < \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} > + < \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{x} >= 0$$

Exercice 105 *Montrer que pour tout* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$, *on a :*

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} > + < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u} > + < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} >= 3[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$$

5.2 Lieux de points

Exercice 106 *Soient* A *et* B *deux points distincts de* $\mathbb{R}^3$ *et* p *un réel. Trouver les couples de points* (M,N) *tels que*

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AB} \\ < \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN} > &= p \end{cases}$$

Exercice 107 *Soient* A, B, C *et* D *quatre points deux à deux distincts de l'espace. Déterminer les lieux de points suivants :*

1. $< \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} > + < \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DM} >= 0$
2. $< \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} > - < \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DM} >= 0$
3. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{0}$

Indication: *On pourra introduire des barycentres bien choisis.*

Exercice 108 *Soient* A, B *et* C *trois points non-alignés de* $\mathbb{R}^3$. *Déterminer l'ensemble des points* M *tels que*

$$\overrightarrow{AM} \wedge (\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{CM}) = \overrightarrow{0}$$

Exercice 109 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Trouver l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$*

Exercice 110 *Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire. Décrire l'application qui à un point M associe le point M' tel que*

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}$$

5.3 Plans, droites

Exercice 111 *Soient $A(1,1,1)$, $B(1,1,0)$ et $C(1,0,0)$ trois points de $\mathbb{R}^3$ ramené à un repère orthonormé.*

1. *Déterminer une équation du plan ABC.*
2. *Déterminer la droite passant par A et orthogonale au plan ABC.*

Exercice 112 *Considérons deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ non coplanaires.*

1. *Montrer qu'il existe deux réels $(a,h) \in (\mathbb{R}^+)^2$ et un repère orthonormé dans lequel ces deux droites ont pour équations :*
$$\begin{cases} y = ax \\ z = h \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -ax \\ z = -h \end{cases}$$
2. *Supposons, de plus, que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales. Trouver une équation de l'ensemble des points équidistants de ces deux droites.*

Exercice 113 *Déterminer la perpendiculaire commune et la distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ quand :*

1. *$\mathcal{D}$ passe par $A(1,1,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}(0,1,1)$; $\mathcal{D}'$ passe par $A'(0,1,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u'}(-1,1,0)$.*
2. *$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont données par les systèmes d'équations suivants :*
$$\begin{cases} 2x = z\cos(\theta) - \sin(\theta) \\ 2y = z\sin(\theta) + \cos(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = z\cos(\theta) + \sin(\theta) \\ 2y = -z\sin(\theta) + \cos(\theta) \end{cases}$$

Exercice 114 *Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - y + 2z = 1$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équations*

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

1. *Déterminer les coordonnées du symétrique orthogonal de $M(x,y,z)$ par rapport à $\mathcal{P}$.*
2. *Donner un système d'équation de la droite $\mathcal{D}'$, symétrique orthogonal de $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{P}$.*

Exercice 115 *Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équations*

$$\begin{cases} x = az + b \\ y = cz + d \end{cases}$$

et $\mathcal{D}'$ la droite obtenue par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe (Oz) avec l'angle θ.
Pour quels réels θ, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles orthogonales ?

Exercice 116 *Considérons les plans suivants :*

$$\begin{array}{lrl} \mathcal{P}_1 : & x - y + a & = 0 \\ \mathcal{P}'_1 : & y + 3z + 1 & = 0 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z - 2b & = 0 \\ \mathcal{P}'_2 : & 3x + 3y + 2z - 7 & = 0 \end{array}$$

et définissons $\mathcal{D}_1$ (resp. $\mathcal{D}_2$) l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}'_1$ (resp. de $\mathcal{P}_2$ et de $\mathcal{P}'_2$).

1. *Trouver les réels a et b tels que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient concourantes.*
   On suppose maintenant cette condition réalisée.
2. *Déterminer l'équation du plan contenant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.*
3. *Montrer que la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ appartient au plan $\mathcal{P}'_2$.*

Exercice 117 *1. Déterminer la perpendiculaire commune et la distance des droites $\mathcal{D}_1$ donnée par le point $A_1(1,0,0)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(1,-1,1)$ et $\mathcal{D}_2$ donnée par le point $A_2(0,0,0)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1,1,1)$.*

2. *Déterminer la perpendiculaire commune et la distance des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont des équations sont :*

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

Exercice 118 *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Appelons $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(a,b,c)$ et de vecteur directeur $(1,2,1)$ et $\mathcal{D}'$ la droite passant par $A'(c,b,a)$ et de vecteur directeur $(2,1,2)$.*
A quelle condition sur le triplet (a,b,c), les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles coplanaires ? Sous cette condition, quelle est l'équation du plan commun ?

MPSI$_2$ **6**

Équations différentielles

6.1 Résolution : équations linéaires d'ordre 1

Exercice 119 *Résoudre les équations suivantes en précisant l'intervalle sur lequel chaque solution est définie :*

1. $y' = 0$
2. $3y' - 2y = 0$
3. $y' + 2y = 0$
4. $y' - \lambda y = 0$
5. $y' - 2xy = 0$
6. $y' - \cos(x)y = 0$
7. $(1 + x^2)y' + xy = 0$
8. $(1 - x^2)y' - 2xy = 0$
9. $x(1 - x)y' - (2x - 1)y = 0$
10. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 0$

Exercice 120 *Résoudre les équations suivantes en précisant l'intervalle sur lequel chaque solution est définie :*

1. $y' - 2y = 2x^3 + x$
2. $y' - 3y = e^{6x}$
3. $y' - y = x + e^x$
4. $y' - 3y = 2.e^{3x}$
5. $y' - \sin(x)y = \sin(x)$
6. $y' - 2xy = e^{x^2}\sin(x)$

MAPLE>`dsolve(diff(y(x),x)-2*x*y(x)-exp(x^2)*sin(x));`

$$y(x) = -e^{(x^2)}\cos x + e^{(x^2)}\_C1$$

Exercice 121 *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *Résoudre $y'(a^2 - x^2)^2 + 4axy^2 = 0$*
2. *Par quels points du plan passe-t-il une infinité de courbes intégrales ? Montrer qu'en ces points, toutes les courbes intégrales ont la même tangente.*
3. *Construite la courbe passant par $(0, 2a/3)$.*

Exercice 122 1. *Quelles sont les solutions de l'équation $xy' + y + \sin(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et sur $\mathbb{R}$?*

2. a) *Trouver les solutions sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation différentielle $xy' = y + \sin(x)y^2$ qui ne s'annulent pas .*
   INDICATION: *on pourra poser $z = 1/y$.*

   b) *Montrer qu'elles peuvent se prolonger sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 123 *Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et f une fonction continue et T-périodique. Déterminer selon la valeur de a le nombre de solutions T-périodiques de l'équation différentielle $y' - ay = f$.*

Exercice 124
1. *Montrer que toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\lim\limits_{+\infty} f + f' = 0$ converge vers 0 en $+\infty$.*
2. *Montrer qu'il existe un entier n et une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ tels $\lim\limits_{+\infty} f + f' + \ldots + f^{(n)} = 0$ et f ne converge pas vers 0 en $+\infty$.*

6.2 Résolution : équations linéaires d'ordre 2

Exercice 125 *Résoudre les équations suivantes en précisant l'intervalle sur lequel chaque solution est définie :*

1. $y'' - 8y' + 15y = 0$
2. $y'' - \sqrt{3}y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$
5. $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$
6. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

Exercice 126 *Résoudre les équations suivantes en précisant l'intervalle sur lequel chaque solution est définie :*

1. $y'' - y = x$
2. $y'' + y' + y = 1$
3. $y'' - 4y = x + e^{4x}$
4. $y'' - 4y = e^{2x}$
5. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$
6. $y'' + y = \cos(x)$

Exercice 127 *Déterminer les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :*

$$y'' + y = \max(1, e^x) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Exercice 128
1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(a - x)$$

2. *Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$ vérifiant :*

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication: *on pourra poser $f(x) = g(\ln x)$.*

Exercice 129 *Pour tout réel $q > 0$, définissons l'ensemble*

$$E_q = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}),\ \forall x > 0,\ f'(x) = f(\frac{q}{x}) \right\}$$

1. *Montrer que si $f \in E_q$ alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle $x^2y'' + qy = 0$.*
2. *Déterminer les fonctions puissances de E_q. En déduire E_q.*

6.3 Résolution : méthodes particulières

Exercice 130 *Considérons l'équation différentielle* $(E) : x^2y'' - 2y = x$

1. *Soit* y *une solution de* (E).
   a) *Montrer que* $z(t) = y(e^t)$ *définit une solution d'une équation différentielle que l'on précisera.*
   b) *En déduire l'expression de* y *sur* $\mathbb{R}_+^\times$.
2. *Déterminer l'expression de* y *sur* $\mathbb{R}_-^\times$ *(on pourra poser* $z(t) = y(-e^t)$*).*
3. *Existe-t-il des solutions de* (E) *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 131 *Considérons l'équation suivante avec* a *et* b *deux fonctions continues :*

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0$$

1. *Montrer que, si* y *est solution de cette équation, alors* $z = 1/y$ *est solution d'une équation linéaire.*
2. *Résoudre* $y' + y - xy^2 = 0$ *et* $y' + (1-x)y - y^2 = 0$.

Exercice 132 *Résoudre l'équation* $y' = \frac{xy}{x^2-y^2}$ *en introduisant la nouvelle fonction* $z = \frac{y}{x}$.

Exercice 133 *Soit* n *un entier supérieur à* 2. *Considérons l'équation différentielle*
$t^2y'(t) + y(t) + y^n(t) = 0$.
En introduisant la fonction $z = y^{1-n}$, *résoudre cette équation différentielle.*

Exercice 134 *Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe* (Oz) *est régi par un système différentiel de la forme :*

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω *dépend de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique.*
En considérant $u = x' + iy'$, *résoudre ce système différentiel.*

6.4 Existence et unicité des solutions

Exercice 135 *Soit* H *la fonction (de Heaviside) définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $H(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$
Résoudre l'équation différentielle $y' + Hy = 0$.
Un problème de Cauchy pour cette équation admet-il une unique solution ?

Exercice 136 *Étudier l'unicité et calculer la ou les solution(s) de*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y_0 \\ y(1) = y_1 \end{cases}$$

où f *est une fonction continue et* λ *un réel strictement positif.*

Exercice 137 *Considérons le problème aux limites sur* $[0, 1]$ *:*

$$\begin{cases} -y'' = f \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

où f est une fonction continue sur $[0,1]$.
Montrer que ce problème admet une unique solution que l'on peut exprimer sous la forme

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

où G est la fonction définie par :

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{si } 0 \le x \le \xi \le 1, \\ \xi(1-x) & \text{si } 0 \le \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Exercice 138 *1. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ le problème de Cauchy suivant*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

où f est une fonction continue et λ un réel strictement positif.

2. *Écrire explicitement la solution dans le cas où $f(t) = \cos(\omega t)$ et étudier si cette solution est bornée selon les valeurs de ω.*

6.5 Étude avec le théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette section, on suppose que chaque problème de Cauchy admet une unique solution définie sur un intervalle maximal.

Exercice 139 *Soit f une fonction continue. Considérons l'équation $y' = f(x)y$.*

1. *Montrer que la fonction identiquement nulle est solution de cette équation.*
2. *Montrer que toute autre solution ne s'annule pas.*

Exercice 140 *Soit y solution de $y' = \sin(y)$ telle que $y(T) = y(0)$ pour une constante $T \neq 0$.*
Montrer que y est T-périodique.
Indication: *on pourra introduire la fonction z définie par $z(x) = y(x+T)$.*

Exercice 141 *1. Résoudre l'équation différentielle $y' = 2|y|$.*
Indication: *on discutera du signe d'une solution y après avoir remarqué que la fonction identiquement nulle est solution.*

2. *Résoudre l'équation différentielle $y' = 2|y-3|$.*

Exercice 142 *Considérons l'équation différentielle*

$$y' = a(x)\cos(y)^2$$

où a est une fonction continue et strictement positive.

1. *Trouver toutes les solutions constantes de cette équation.*
   Soit y une solution non-constante définie sur un intervalle I.
2. *Montrer que y est strictement croissante.*
3. *Montrer, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, qu'il existe un entier k tel que*

$$\forall x \in I, \qquad \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < y(x) < \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

4. *Posons, dans cette question, $a : x \to e^x$*
   a) *Résoudre complètement l'équation.*
   b) *Trouver la solution qui vérifie $y(0) = 5\pi$.*
   c) *Préciser l'intervalle de définition de cette solution et calculer ses limites aux extrémités de ce dernier.*

MPSI$_2$ 7

Arcs paramétrés

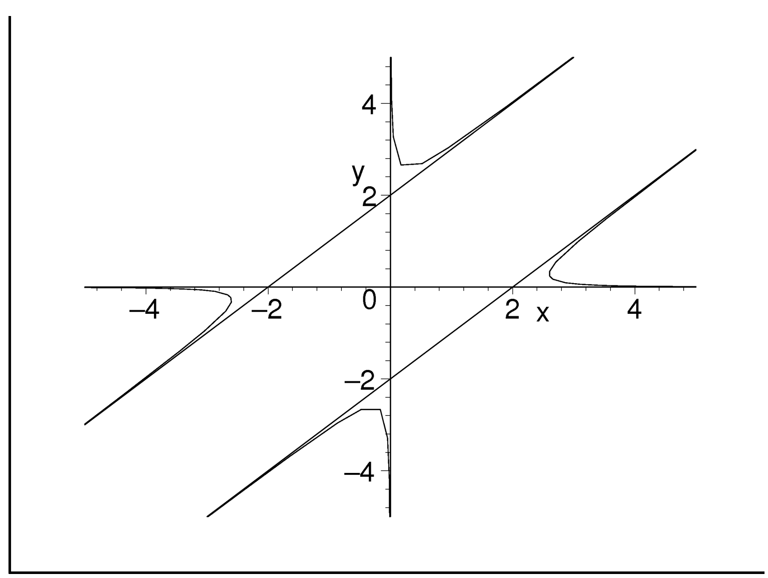
7.1 Équations parametriques

Exercice 143 *Étudier la courbe paramétrée par* $t \in \mathbb{R} \mapsto (3\cos t + 2\cos 3t, 3\sin t - 2\sin 3t)$. *Donner les équations des tangentes en* $t_0 = 0$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$ *et* $t_0 = -\frac{\pi}{3}$.

Exercice 144

1. *Étudier la courbe paramétrée par* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\} \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{1}{t^3-t}\right)$. *Donner l'équation de sa tangente en* $t_0 = 2$.
2. *Mêmes questions avec* $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \left(\frac{(t-1)^2}{t}, \frac{(t-1)^3}{t^2}\right)$ *et* $t_0 = 1$.
3. *Mêmes questions avec* $t \in \mathbb{R} \mapsto (-3t^5 + 6t^4 + 5t^3 - 12t^2, 1 - t^4)$.

```
MAPLE>plot([t^ 3/(t^ 2-1),1/(t^ 3-t),t=-8..8],x=-5..5,y=-5..5);
```



Exercice 145 *Soit l'arc paramétré défini par* $t \in \mathbb{R} \mapsto (\sin(\pi \sin t), \cos(\pi \cos t))$.

1. *Étudier sa périodicité et ses symétries éventuelles de façon à déterminer un domaine d'étude le plus petit possible.*
2. *Étudier la courbe obtenue. Donner l'équation de sa tangente en* $t_0 = 1$.

Exercice 146 *(Spirale logarithmique)*
Étudier la courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$*, et donner l'équation de sa tangente en* $t_0 = \frac{3\pi}{4}$.
INDICATION: *on pourra, dans un premier temps, limiter l'étude à* $[0, \pi]$.

Exercice 147 *On considère le mouvement d'une échelle de longueur* $l > 0$*, qui à l'instant* $t = 0$ *est adossée à un mur vertical, et qui se met à glisser. On note* $H(t)$*,* $B(t)$ *et* $M(t)$ *les positions respectives à l'instant* t *du haut, du bas et du milieu de l'échelle. On suppose que* $B(t)$ *se déplace à vitesse constante* $v > 0$ *le long de l'axe* $(0x)$.

1. *Donner un paramétrage des mouvements de* $H(t)$*,* $B(t)$ *et* $M(t)$ *au cours du temps* t.
2. *Quelles sont leurs trajectoires ?*

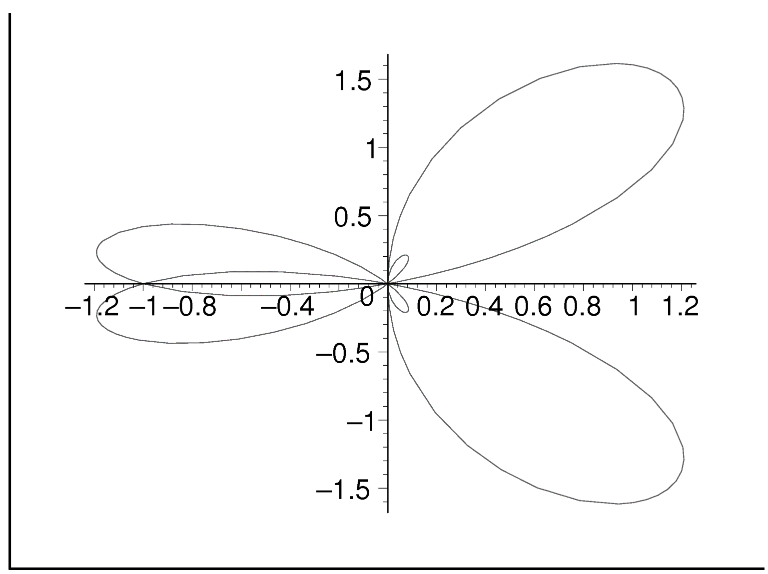
Exercice 148 *Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à la courbe paramétrée* $t \mapsto (2t^3, 3t^2)$.

7.2 Équations polaires

Exercice 149 *Donner une équation cartésienne de la trajectoire des courbes paramétrées en coordonnées polaires suivantes :*

1. $\rho : \theta \in \mathbb{R} \mapsto 4$
2. $\rho : \theta \in \mathbb{R} \mapsto 3 \sin\theta \cos\theta$
3. $\rho : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \cos 2\theta$
4. $\rho : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sin 2\theta - \cos 3\theta$

```
MAPLE>plot([sin(2*x)-cos(3*x),x,x=0..2*Pi],coords=polar);
```



Exercice 150 *Paramétrer le triangle de sommets* $(0, 2)$*,* $(-\sqrt{3}, -1)$ *et* $(\sqrt{3}, -1)$ *en coordonnées polaires.*

Exercice 151 *Étudier la courbe en polaires* $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \rho(\theta) = \dfrac{1}{2} - \cos 4\theta$.

Exercice 152 *Étudier chacune des courbes suivantes sur son ensemble de définition (à préciser) :*

1. $\theta \mapsto \rho(\theta) = 1 - \sqrt{|\sin 2\theta|}$
2. $\theta \mapsto \rho(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin 2\theta}+\sqrt{1+\sin 2\theta}}$
3. $\theta \mapsto \rho(\theta) = \cos^{2/3}\theta + \sin^{2/3}(\theta)$
4. $\theta \mapsto \rho(\theta) = \tan \frac{2\theta}{3}$
5. $\theta \mapsto \rho(\theta) = 1 + \tan \frac{\theta}{2}$
6. $\theta \mapsto \rho(\theta) = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta\cos 2\theta}$

Exercice 153 *(Limaçon de Pascal)*
Soient $l \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R et O un point de C. Soit D une droite passant par O coupant le cercle en un autre point A. Notons M et M' les points de D tels que $MA = M'A = l$. Donner un paramétrage en polaires de la courbe décrite par M et M' lorsque D varie, puis étudiez cette courbe.
RÉPONSE : $\rho = l + 2R\cos\theta$.

Exercice 154 *(Strophoïde droite)*
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R et de centre C, un point O sur le cercle, et Δ la droite passant par C orthogonale à (OC). Soit D une droite passant par O et coupant $\mathcal{C}$ en A et Δ en A', et soit M le point de D tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$.

1. *Donner un paramétrage en polaires de la courbe décrite par M quand D varie. Étudiez cette courbe.*
2. *Même question avec un paramétrage en coordonnées cartésiennes.*

RÉPONSES : $\rho = -\frac{R\cos 2\theta}{\cos\theta}$ *puis* $x(t) = R\frac{t^2-1}{t^2+1}$ *et* $y(t) = Rt\frac{t^2-1}{t^2+1}$

7.3 Étude métrique

Exercice 155 *Calculer la longueur totale des courbes suivantes :*

1. $x = t - \mathrm{ch}t\mathrm{sh}t, \quad y = 2\mathrm{ch}t$
2. $\rho = \mathrm{th}\frac{\theta}{2}$
3. $x = (1+\cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t\cos t$
4. $\rho = \sin^2\frac{\theta}{2}$

Exercice 156 *Déterminer les coordonnées du centre de courbure pour les courbes suivantes :*

1. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2$
   RÉSULTAT: $x = -4t^3$, $y = \frac{3+6t^2-3t^4}{2}$.
2. $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$
3. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$
4. $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$
5. $xy = 1$
   RÉSULTAT: $(\frac{3x^4+1}{2x^3}, \frac{x^4+3}{2x})$.
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
7. $\rho = e^\theta$ *(Spirale logarithmique)*
8. $\rho = 1 + \cos\theta$ *(Cardioïde)*

Exercice 157 *Déterminer le lieu des centres de courbure de l'arc d'équation polaire $\rho = a\theta$ (avec $a > 0$) aux points situés sur l'axe $(0y)$.*

Exercice 158 *Déterminer le rayon de courbure de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $2x^2 + y^2 = 1$ aux points intersection de $\mathcal{C}$ et des axes Ox et Oy.*

Exercice 159 *Soient $\mathcal{C}$ une courbe plane et s une abscisse curviligne sur $\mathcal{C}$. Á chaque point $M \in \mathcal{C}$ d'abscisse curviligne s, on associe le point $N = M - \frac{s}{2}\overrightarrow{T}$. Trouver $\mathcal{C}$ telle que N reste sur Ox.*

Exercice 160 *Trouver toutes les courbes planes dont le centre de courbure reste sur un cercle $\mathcal{C}(O, r)$ fixé.*

Exercice 161 *Chercher les courbes planes vérifiant l'équation intrinsèque :*

1. $R = s$
2. $Rs = 1$
3. $R^2 = 2as$ avec $a > 0$
4. $R = 1 + s^2$
5. $R^2 + s^2 = a^2$ avec $a > 0$

Exercice 162 *Considérons l'arc paramétré* $t \mapsto a(t - \sin t, 1 - \cos t)$. *A tout point* M *de cet arc, on associe* M' *le centre de courbe de l'arc au point* M *et* M'' *le centre de courbure de la développée en* M'. *Montrer que le vecteur* $\overrightarrow{MM''}$ *est indépendant du point* M.
Étudier la réciproque.

Exercice 163 *Déterminer les arcs paramétrés tel qu'il existe un coefficient de proportionnalité entre la pente de la tangente et une abscisse curviligne.*

Exercice 164 *Soit* φ *une solution de l'équation différentielle* $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ *où* a, b *et* c *sont des fonctions suffisamment régulière. Déterminer le lieu des centres de courbure de la courbe intégrale définie par* $x \mapsto (x, \varphi(x))$.

MPSI$_2$ **8**

Coniques

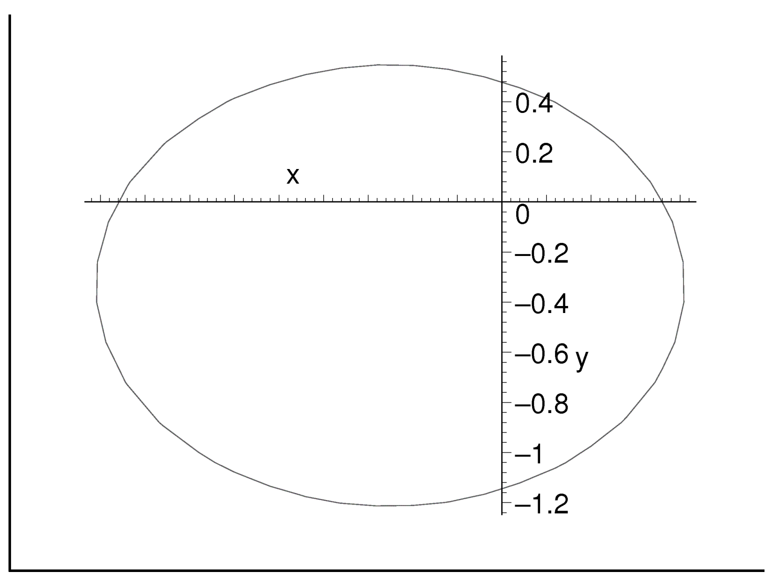
8.1 Définitions algébriques

Exercice 165 *Décrire l'ensemble $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 - xy + y^2 = 1$ puis construire $\mathcal{E}$.*

Exercice 166 *1. Décrire la nature de la courbe suivante et la tracer :*
$9y^2 + 4x^2 + 6y + 4x - 5 = 0$.

2. *Décrire la nature de la courbe suivante : $9y^2 + 12xy + 4x^2 + 6y + 4x - 5 = 0$.*
INDICATION: *on pourra commencer par éliminer le terme $12xy$ à l'aide d'une rotation bien choisie.*

```
MAPLE>with(plots) :
MAPLE>implicitplot(9*y^ 2+4*x^ 2+6*y+4*x=5,x=-2..2,y=-2..2);
```



8.2 Définitions géométriques

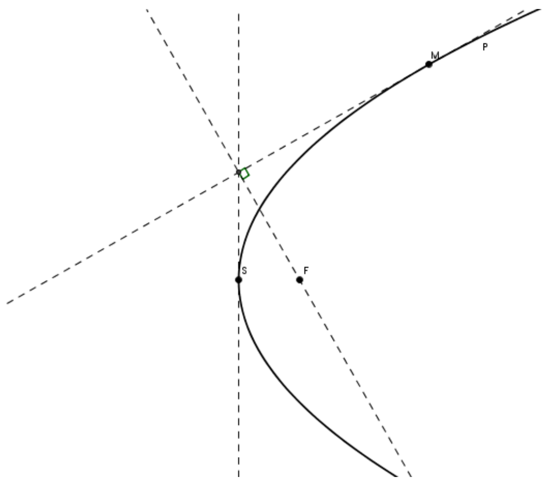
Exercice 167 *Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre O, $A \in \mathcal{C}$ et A' le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A. Pour $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, A'\}$, on construit le projeté N sur le diamètre perpendiculaire à (OA), et I, le point d'intersection de (OM) et (AN).*
Montrer que I décrit une conique dont on précisera la nature.

Exercice 168 *Soient $\mathcal{C}$ une ellipse de foyer F et F' et $M \in \mathcal{C}$. Montrer que la tangente en M à $\mathcal{C}$ est une bissectrice de MF et MF'.*

Exercice 169 *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole d'équation $xy = \dfrac{a^2}{2}$ dans un repère orthonormé. Considérons A, B et C trois points de cette hyperbole.*

1. *Montrer que l'orthocentre du triangle ABC appartient à $\mathcal{H}$*
2. *Supposons que ABC est rectangle en A. Montrer que la tangente en A est orthogonale à (BC).*

Exercice 170 *Démontrer que le projeté orthogonal du foyer d'une parabole sur une tangente à cette parabole est sur la tangente du sommet de cette parabole.*



Exercice 171 *À tout point M d'une ellipse, qui se projette orthogonalement en I sur l'axe focal, on associe l'un des deux points P de cette conique où la tangente est parallèle à (OM) et sa projection J. Calculer l'aire du triangle (MOP) ainsi que les réels $OM^2 + OP^2$ et $OI^2 + OJ^2$.*

Exercice 172 *Deux points M et M' décrivent une ellipse de foyers F et F' de façon que leurs tangentes se coupent en un point P du cercle tangent à l'ellipse en les sommets de l'axe focal. Montrer qu'au prix d'un éventuel échange entre M et M' le quadrilatère $(MFF'M')$ est un trapèze,*
INDICATION: *on pourra comparer les pentes des droites (MF) et (OP).*

Exercice 173 *Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux paraboles ayant le même axe focal. On suppose que ces deux paraboles ont un point commun M. Calculer une mesure de l'angle des deux tangentes en ce point.*

Exercice 174 *Considérons une parabole de sommet O et son image par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'ensemble des points par lesquels on peut mener deux tangentes (une à chaque parabole) qui soient perpendiculaires entre elles.*

Exercice 175 *Soient $\mathcal{H}$ une hyperbole de Δ une droite coupant l'hyperbole en deux points A, B et les asymptotes de l'hyperbole en deux points M, N. Montrer que le milieu de $[A, B]$ est aussi le milieu de $[M, N]$.*

Exercice 176 *Considérons le carré C reliant les sommets de coordonnées $(\pm 1, \pm 1)$. Déterminer l'ensemble des points équidistants de l'origine $(0, 0)$ et du bord du carré C.*

Exercice 177 *Déterminer la longueur minimale d'une corde inscrite dans la parabole d'équation $y^2 = 2x$ et normale à l'une des tangentes à ses extrémités.*

Deuxième partie

Algèbre

MPSI$_2$ 9

Structures algébriques

9.1 Lois de composition interne

Exercice 178 1. *Déterminer les propriétés de* $\perp$ *la loi de composition interne sur* $\mathbb{Q}$ *définie par :*

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \qquad a \perp b = a + b + ab$$

2. *Même question avec la loi* ∇ *définie sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *par :*

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \qquad (a,b)\nabla(c,d) = \left(ac, \frac{d}{a} + bc\right)$$

Exercice 179 *Soit* E *un ensemble muni d'une loi de composition interne associative* $\otimes$*.*
On suppose qu'il existe $a \in E$ *tel que* $x \mapsto a \otimes x \otimes a$ *est surjective de* E *dans* E*.*
Montrer qu'il existe un élément neutre à gauche et un élément neutre à droite pour $\otimes$*.*

Exercice 180 *Soit* E *un ensemble muni d'une loi de composition interne* $\times$ *associative, commutative et qui admet un élément neutre. On définit une loi de composition interne* $\otimes$ *sur* $\mathcal{P}(E)$ *par*

$$A \otimes B = \{a \times b, \quad a \in A, b \in B\}$$

1. *Montrer que* $\otimes$ *est associative, commutative et admet un élément neutre.*
2. *Déterminer les ensembles qui admettent un symétrique pour* $\otimes$*.*

Exercice 181 *Soit* E *un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative* $\divideontimes$*.*
Montrer qu'il existe un élément $x \in E$ *tel que* $x \divideontimes x = x$*.*

9.2 Groupes

Exercice 182 *Les ensembles suivants sont-ils des groupes ? Si oui, sont-ils commutatifs ?*

1. *L'ensemble des applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *de la forme* $x \mapsto ax + b$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *muni de la composition.*
2. $\mathbb{R}^2$ *muni de la loi* $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$*.*
3. $]-1, 1[$ *muni de la loi* $x \oplus y = \frac{x+y}{1+xy}$

Exercice 183 *Soient* $(G, \times)$ *un groupe,* E *un ensemble, et* $f : G \to E$ *une bijection.*
Définissons une loi de composition interne $\star$ *sur* E *par :*

$$\forall\ (x,y) \in E^2, \qquad x \star y = f(f^{-1}(x) \times f^{-1}(y))$$

Montrer que $(E, \star)$ *est un groupe isomorphe à* $(G, \times)$*.*

Exercice 184 *Soient* $(G, \star)$ *un groupe, et* H *et* K *deux sous-groupes de* G.

1. *Montrer que* $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si* $H \subset K$ *ou* $K \subset H$.
2. *On pose* $HK = \{x \star y, \quad x \in H, \quad y \in K\}$. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   i) HK *est un sous-groupe de* $(G, \star)$ *iii)* KH *est un sous-groupe de* $(G, \star)$

   ii) $HK \subset KH$ *iv)* $KH \subset HK$

Exercice 185 *Soient* G *et* G' *deux groupes multiplicatifs et* f *un morphisme de* G *dans* G'. *Considérons* H *le sous groupe de* G *engendré par les éléments de la forme* $xyx^{-1}y^{-1}$ *avec* $(x, y) \in G^2$. *Montrer que* $f(G)$ *est un sous-groupe commutatif de* G' *si, et seulement si* $H \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 186 *Soit* $(G, \star)$ *un groupe fini de cardinal pair. Définissons*

$$E = \{x \in G, \quad x^2 \neq e\}$$

1. *Montrer que si* $x \in E$, $x^{-1} \in E$.
2. *En déduire que* E *est de cardinal pair.*
3. *Conclure qu'il existe un élément* x *de* G, *différent de* e, *tel que* $x^2 = e$.

Exercice 187 *Soient* $(G, \star)$ *un groupe, et* H *et* K *deux sous-groupes de* G *tels que* $H \cap K$ *est réduit à l'élément neutre.*

1. *Montrer que l'application* ϕ, *de* $H \times K$ *dans* $HK = \{x \star y, \quad x \in H, \quad y \in K\}$ *définie par* $\phi(x, y) = x \star y$, *est une bijection.*
2. *Supposons de plus que* H *et* K *sont finis. Que dire du cardinal de* HK *?*

Exercice 188 *Soient* G *un groupe fini et* A, B *deux parties de* G *telles que* $\mathit{card}\, A + \mathit{card}\, B > \mathit{card}\, G$. *Notons* $AB = \{ab, \ a \in A, \ b \in B\}$. *Montrer que* $G = AB$.

Exercice 189 *(Théorème de Lagrange)*
Soient G *un groupe fini et* H *un sous-groupe de* G. *Considérons la relation binaire sur* G *définie par*

$$x \approx y \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists h \in H, \ x = hy$$

1. *Montrer que* $\approx$ *est une relation d'équivalence.*
2. *En considérant les classes d'équivalence de* $\approx$, *montrer que* $\mathit{card} H$ *divise* $\mathit{card} G$.

Exercice 190 *Montrer qu'un groupe qui admet un nombre fini de sous-groupes est fini.*

9.3 Groupes symétriques

Exercice 191 *Déterminer la décomposition en cycles disjoints et la signature des permutations suivantes :*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 & 6 & 7\,8\,9\,10 \\ 9\,4\,3\,8\,7 & 10 & 1\,2\,5\;\;6 \end{pmatrix} \qquad \sigma' = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 9\,4\,3\,8\,7\,6\,1\,2\,5 \end{pmatrix}$$

Exercice 192 1. *Montrer que l'ensemble des transpositions* $(i, i+1)$ *engendre* $\mathfrak{S}_n$.

2. *En déduire que* $(1, 2)$ *et* $(1, 2, ..., n)$ *engendre* $\mathfrak{S}_n$..

Exercice 193 *Définissons* G *l'ensemble des isométries planes laissant invariant un triangle équilatéral* ABC.

1. *Montrer que* G *est un groupe pour la loi* $\circ$.

2. *Montrer que le centre de gravité O du triangle ABC est invariant par les éléments de G.*
3. *Montrer que toute isométrie de G induit une permutation de l'ensemble $\{A,B,C\}$.*
   En déduire l'ensemble des isométries de G.

Exercice 194 *Soit $n \geq 3$. Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$, i.e. l'ensemble des permutations qui permutent avec tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$.*
INDICATION: *on pourra commencer par déterminer quelles permutations commutent avec les transpositions.*

Exercice 195 *Deux permutations σ, σ' de $\mathfrak{S}_n$ sont dites conjuguées s'il existe $f \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma' = f \circ \sigma \circ f^{-1}$.*

1. *Montrer que deux cycles sont conjugués si et seulement si ils ont la même longueur.*
2. *En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux permutations soient conjuguées (en utilisant leur décompositions en cycles à supports disjoints).*

9.4 Anneaux-corps

Exercice 196 *Considérons $A = \{x + y\sqrt{3},\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$.*

1. *Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{Z} \\ x + y\sqrt{3} & \mapsto & |x^2 - 3y^2| \end{array} \right.$ est multiplicative, puis établir successivement que :*
   - $\forall z \in A, \quad \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$
   - $\forall z \in A, \quad \varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z$ *inversible.*
   - *L'équation $x^2 - 3y^2 = -1$ n'admet pas de racines entières.*
     INDICATION: *on pourra discuter selon la valeur du reste de x modulo 3.*
3. *En déduire qu'un élément inversible $x + y\sqrt{3}$ est strictement supérieur à 1 si, et seulement si, x et y sont strictement positifs.*
   En déduire ω le plus petit élément inversible strictement supérieur à 1.
4. *Montrer que pour tout $u \geq 0$ inversible, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega^n \leq u < \omega^{n+1}$ et montrer que $\omega^{-n}u$ est un inversible dans l'intervalle $[1, \omega[$.*
   Expliciter l'ensemble des éléments inversibles positifs (puis tous les inversibles) de A.

Exercice 197 *Définissons le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.*

1. *Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.*
2. *Montrer que $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible si, et seulement si, $a^2 + b^2 = 1$.*
   En déduire tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. *Considérons $a + ib$ et $c + id$ deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ et supposons que $c + id \neq 0$. Soit $u + iv$ le quotient de $a + ib$ par $c + id$ et p (resp. q) l'entier le plus proche de u (resp. v).*
   Soient r et s les réels définis par :

$$a + ib = (p + iq)(c + id) + r + is$$

   Montrer que : $r^2 + s^2 < c^2 + d^2$.

Exercice 198 *Soit A l'ensemble des rationnels à dénominateur impair en écriture irréductible.*

1. *Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ dont on déterminera les inversibles.*
2. *Montrer que pour tout idéal non-nul I de A, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $I = 2^k A$.*

Exercice 199 *Soit A un anneau.*

1. *Supposons que les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps.*

2. Supposons que A est commutatif et que les idéaux I de A vérifient

$$\forall (x,y) \in A^2, \qquad xy \in I \quad \Rightarrow \quad x \in I \text{ ou } y \in I$$

Montrer que A est intègre puis que $x \in x^2 A$ pour tout $x \in A$. En déduire que A est un corps.

Exercice 200 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$. On pose*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) = \left\{ a + b\sqrt{\alpha}, \quad (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}$$

1. Soit $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{\alpha}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
   Dans toute la suite, on suppose que $\alpha = 2$ et on note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3. Pour $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{K}$, posons $\overline{x} = a - b\sqrt{2}$, le conjugué de x.
   Montrer que l'application $x \mapsto \overline{x}$ est bien définie et est un automorphisme du corps $\mathbb{K}$.
4. Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $N(x) = x\overline{x}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$, montrer que
   a) $N(x) = 0$ si, et seulement si $x = 0$;
   b) $N(xy) = N(x)N(y)$.

   Calculer $N(1/x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}^*$.
5. Soit $A = \left\{ a + b\sqrt{2}, \quad (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$. Montrer que A est un sous-anneau intègre du corps $\mathbb{K}$.
   Montrer que $x \in A$ admet un inverse dans A si et seulement si $|N(x)| = 1$; calculer, le cas échéant, l'inverse de x ?

Exercice 201 *Soit A un anneau tel que pour tous x, $y \in A$, $xy = yx$ ou $xy = -yx$. Montrer que A est commutatif.*

Exercice 202 *Soient a, b deux réels. Considérons $\oplus$ et $\otimes$ deux lois de composition sur $\mathbb{R}$ définies par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x \oplus y = (x-1) + (y-1) + 1 \qquad x \otimes y = 1 - (x-1)(y-1)$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Exercice 203 *Considérons un anneau intègre et fini $(A, +, .)$.*
A tout élément non-nul $a \in A$, on associe l'application $\varphi_a : \begin{cases} A \to A \\ x \mapsto ax \end{cases}$
Montrer que, pour tout $a \in A$ non-nul, φ_a est bijective et en déduire que A est un corps.

Exercice 204 *Montrer qu'un morphisme de corps est toujours injectif.*
Exhiber un morphisme d'anneaux non injectif.

Exercice 205 *Soit A un anneau. Soit $a \in A$ un élément nilpotent (i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$).*

1. Montrer que $1 - a$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit u l'application de A dans A définie par $u(x) = ax - xa$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u^n est l'application nulle.

MPSI$_2$ **10**

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

10.1 Divisibilité

Exercice 206 *Montrer que, pour tout entier n, 251 divise $250.2009^n + 2009^{2009}$ puis que 111 divise $10^{9n+2} + 10^{3n+1} + 1$.*

Exercice 207 *Soit x un nombre à (au plus) deux chiffres. Montrer que le nombre à (au plus) six chiffres obtenu en juxtaposant trois fois x est divisble par 37.*

Exercice 208 *Montrer que 2009 divise $\sum_{k=1}^{2008} k^{2009}$.*

Exercice 209 *(Petit théorème de Fermat) Soit p un nombre premier.*

1. *Montrer que, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.*
2. *Montrer que, pour tout entier n non-multiple de p, p divise $n^p - n$ puis que p divise $n^{p-1} - 1$.*

Exercice 210
1. *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers et $\frac{p}{q}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible.*
   Montrer que, si $\frac{p}{q}$ est une racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.
2. *Trouver les racines rationnelles de $6X^4 - 11X^3 - X^2 - 4$.*

Exercice 211 *Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier $n \geq 1$:*

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2.10^n + u_n, \text{ si } 2^{n+1} \text{ divise } u_n\,; \\ 10^n + u_n, \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que, pout tout $n \geq 1$, 2^n divise u_n.*
2. *En déduire que pour tout entier n, 2^n admet un multiple entier dont l'écriture décimale ne comporte que des 1 et des 2.*

Exercice 212 *Considérons 2008 entiers tels que leur somme soit nulle. Montrer que la somme de leurs puissances d'ordre 37, est divisible par 399.*
Indication: *on pourra utiliser le petit théorème de Fermat.*

```
MAPLE>ifactor(399);

                         (3)(7)(19)
```

10.2 PGCD

Exercice 213 *Soient n, m, q, r quatre entiers positifs tels que $n = qm + r$ et a un réel.*

1. *Montrer que $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = (a^m - 1) \wedge (a^r - 1)$*
2. *Montrer que $(a^m - 1) \wedge (a^n - 1) = a^{n \wedge m} - 1$.*

Exercice 214 *Pour tout entier n, on pose $F_n = 2^n + 1$.*

1. *Montrer que si n est impair alors F_n n'est pas un nombre premier.*
2. *On suppose que n est de la forme $2^q(2k + 1)$ avec $k \geq 1$. Montrer que F_n n'est pas un nombre premier.*
3. *En déduire que si F_n est nombre premier, alors n est une puissance de 2.*

```
MAPLE>ifactor(2^(2^5)+1);

                                  (641)(6700417)
```

Exercice 215 *Montrer que $2^n - 1$ divise $2^{nm} - 1$.*
En déduire que, si $2^n - 1$ premier alors n est premier.

Exercice 216 *Soient a, b et c trois entiers naturels. Établir la relation suivante :*

$$(a \vee b \vee c)(ab \wedge bc \wedge ca) = abc$$

10.3 Équations diophantiennes

Exercice 217 1. *Déterminer les solutions entières (x, y) de l'équation $323x - 391y = 612$.*

2. *Trouver tous les entiers n tels que $n = 321[323]$ et $n = 100[391]$.*

```
MAPLE>isolve(323*x-391*y=612);

                         {x = 14+23*_N1, y = 10+19*_N1}
```

Exercice 218 *Chercher les couples d'entiers (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.*

Exercice 219 *Déterminer les solutions entières (x, y) de l'équation $x \wedge y + x \vee y = y + 4$.*
INDICATION: *on pourra discuter selon la valeur du pgcd $x \wedge y$.*

Exercice 220 *Résoudre avec $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'équation $n^m = m^n$.*

Exercice 221 *Soit n un entier naturel non-nul.*
Montrer que $x^n + y^n = z^{n+1}$ admet des solutions $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

Exercice 222 1. *Soient a, b, c et d quatre entiers fixés. On cherche des entiers u, v et w tels que*

$$au + bv + cw = d$$

   a) *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette des solutions.*
   b) *Montrer que cette équation est équivalente au système suivant d'inconnues (u, v, w, x) :*

$$\begin{cases} au + vb = (a \wedge b)x \\ (a \wedge b)x + cw = d \end{cases}$$

2. *Déterminer toutes les solutions de $4u + 6v + 8w = 10$.*

10.4 *Varia*

Exercice 223 *(Théorème de Wilson) Montrer que, pour tout nombre premier* $p \geq 2$, $(p-1)! = -1[p]$.

Exercice 224 *Soient* $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $ad = bc$. *Montrer que* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *n'est pas premier.*
INDICATION: *on pourra introduire* $a \wedge c$.

Exercice 225 *Soit* p *un nombre premier. Pour tout entier* n, *on note* $\nu_p(n)$ *l'exposant de* p *dans la décomposition de* n *en produit de nombres premiers.*

1. *Exprimer* $\nu_p(n!)$ *en fonction des* $\nu_p(k)$ *pour* $1 \leq k \leq n$.
2. *Montrer qu'il y a exactement* $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$ *entiers entre 1 et* n *dans lesquels* p *figure avec l'exposant* k.
3. *Montrer que la somme* $\sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ *compte un nombre fini de termes non-nuls puis que cette somme vaut* $\nu_p(n!)$.
4. *Combien y a-t-il de 0 à la fin de l'écriture de 1000 ! ?*

Exercice 226 *Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers* p_1, p_2, $\ldots$, p_N *congrus à 3 modulo 4 et on considère* $n = 4 \prod_{k=1}^{N} p_k - 1$.

1. *Montrer que* n *admet un diviseur premier congru à 3 modulo 4.*
2. *Conclure.*

Exercice 227 *Soient* $a_1, \ldots, a_n$ *(avec* $n \geqslant 2$*) sont des entiers non nuls, tels qu'il existe un nombre premier* p, *un entier* $h \geqslant 1$ *et* $i \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $p^h \mid a_i$ *et* $p^h \nmid a_j$ *pour tout* $j \neq i$. *Montrer que* $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ *n'est pas un entier.*

Exercice 228 *(Test de Rabin-Miller) Soient* n *un nombre premier de la forme* $n = q2^p + 1$ *avec* p *impair et* $a \in \mathbb{Z}$ *premier avec* n. *Définissons le* $(p+1)$*-uplet* $(b_k)_{k \leq p}$ *de* $[\![0, n-1]\!]$ *par*

$$b_0 = a^q[n], \qquad b_k \equiv b_{k-1}^2[n] \text{ pour tout } k \leq p$$

1. *Montrer que* $b_p = 1$.
2. *Supposons* $b_0 \neq 1$. *Montrer qu'il existe un indice* i *tel que* $b_i = n - 1$.

MPSI$_2$ **11**

Polynômes et fractions rationnelles

11.1 Arithmétique

Exercice 229 *Factoriser le polynôme* $(X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ *dans* $\mathbb{C}$.

Exercice 230 *Factoriser dans* $\mathbb{R}$ *le polynôme* $P(X) = 3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6$.

Exercice 231
1. *Montrer que les polynômes* $X^5 - 1$ *et* $X^2 + X + 1$ *sont premiers entre eux.*
2. *Déterminer explicitement une relation de Bézout entre ces polynômes.*

Exercice 232 *Déterminer tous les polynômes* P *tels que* P' *divise* P.

Exercice 233 *Déterminer les polynômes* P *tels que le reste de la division de* P *par*
- $(X+1)^3$ *soit* -5
- $(X-1)^3$ *soit* 11

Exercice 234 *Montrer que, pour tout* $(m,n,p,q) \in \mathbb{N}^4$, $X^3 + X^2 + X + 1$ *divise* $X^{4m+3} + X^{4n+2} + X^{4p+1} + X^{4q}$.

Exercice 235 *Soit* p *et* q *deux entiers naturels.*
1. *Calculer le reste de la division euclidienne de* $X^p - 1$ *par* $X^q - 1$.
2. *En déduire le pgcd de* $X^p - 1$ *et* $X^q - 1$ *selon les valeurs de* p *et* q.

```
MAPLE>gcd(X^8-1,X^6-1);
```

$$X^2 - 1$$

Exercice 236 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. *On pose*

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (\cos(a_k) + X\sin(a_k))$$

Déterminer le reste de la division euclidienne de P *par* $X^2 + 1$.

Exercice 237 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.
1. *Montrer qu'il existe un unique couple* (P,Q) *de polynômes de degrés strictement inférieurs à* n *tels que :*
$$(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$$
2. *Montrer que* $P(X) = Q(1-X)$ *et* $Q(X) = P(1-X)$.

3. *Montrer qu'il existe une constante k telle que :*

$$(1-X)P'(X) - nP(X) = kX^{n-1}$$

4. *En déduire les coefficients de P.*

Exercice 238 1. *Montrer que, si A et B sont deux polynômes qui sont chacun somme de deux carrés de polynômes, alors il en est de même pour AB.*

2. *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Déduire de la question précédente qu'il existe deux polynômes à coefficients réels P et Q tels que $A = P^2 + Q^2$ si, et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A(x) \geq 0$$

Exercice 239 *Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers sans racine complexe commune. Définissons pour tout entier n, $u_n = P(n) \wedge Q(n)$.*
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est périodique.

Exercice 240 *Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a, b \in \mathbb{C}$ distincts.*

1. *Déterminer, en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$, le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.*
2. *Application : trouver le reste de la division euclidienne de $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par X^2+1.*

11.2 Racines de polynômes

Exercice 241 *Déterminer la multiplicité de la racine $a \neq 0$ dans*
$P(X) = (X-a)^n - (X^n - a^n)$.

Exercice 242 *Soit P un polynôme de la forme $P(X) = X^3 + pX + q$ avec $(p,q) \in \mathbb{R}^2$*

1. *Montrer que P possède une racine double si, et seulement si, $4p^3 + 27q^2 = 0$.*
2. *Montrer que, si P possède 3 racines réelles distinctes, alors $4p^3 + 27q^2 < 0$.*
   La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 243 *Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n tel que :*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad a_{n-k} = a_k$$

Montrer que z est racine non-nulle de P si et seulement si $\frac{1}{z}$ est une racine de $P(\frac{1}{X})$.

Exercice 244 *On cherche l'ensemble des polynômes P non-nuls vérifiant l'équation suivante :*

$$P(X^2) = P(X)P(X-1) \tag{11.1}$$

1. *Justifier que si z est racine d'un tel polynôme P alors z^2 et $(1+z)^2$ sont aussi des racines de P.*
   Dorénavant z désigne une racine de P.
2. *Montrer que, si $z \neq 0$, alors $|z| = 1$.*
   INDICATION: *on pourra étudier la suite définie par $z_0 = z$ et $z_{n+1} = z_n^2$ pour tout n.*
3. *Montrer que, si $z \neq -1$, alors $|z+1| = 1$.*
4. *Déterminer les racines possibles de P.*
5. *En déduire tous les polynômes solutions de (11.1).*

Exercice 245 *On pose $P(z) = (z+1)^n - \exp(2ina)$ avec a un nombre réel.*

1. *Déterminer les racines $(z_k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ de P.*

2. *En déduire que* $1 - \exp(2ina) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$ *puis que* $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^n} - 1$.

Exercice 246 *Considérons* $E = \{3,5,7,11,13,17\}$ *et* 50 *réels* $(a_i)_{i\in[\![0,49]\!]}$ *tels que*

$$\forall p \in E,\ \forall r \in [\![1, p-1]\!], \qquad \sum_{i=r[p]} a_i = \sum_{i=0[p]} a_i$$

Montrer que les réels $(a_i)_{i\in[\![0,49]\!]}$ *sont tous nuls.*
INDICATION: *on pourra chercher des racines du polynôme* $\sum_{i=0}^{49} a_i X^i$.

Exercice 247 *Déterminer tous les polynômes* P *de* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.
INDICATION: *on pourra commencer par prouver que* $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 248 *Montrer que si* P *est scindé à racines simples, alors toutes les dérivées non nulles de* P *est sont scindées à racines simples.*
En déduire que deux coefficients successifs de P *ne peuvent être simultanément nuls et qu'un coefficient nul est encadré par deux coefficients de signes différents.*

11.3 Fractions rationnelles

Exercice 249 *Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans* $\mathbb{C}(X)$ *:*

1. $\frac{X^4+1}{X^4-1}$
2. $\frac{X^2+1}{X^2(X+1)^2}$
3. $\frac{X^{16}+1}{X^4+1}$
4. $\frac{X^3+7X^2+14X+9}{(X+1)^2(X+2)^2}$

```
MAPLE>convert((X^3+7*X^2+14*X+9)/((X+1)^2*(X+2)^2),fullparfrac,X);
```

$$\frac{1}{(X+1)} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{(X+2)^2}$$

Exercice 250 *Décomposer la fraction rationnelle* $\frac{X^3}{(X^4-1)^2}$ *en éléments simples dans* $\mathbb{C}$ *puis dans* $\mathbb{R}$.

Exercice 251 *Décomposer* $\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}$ *en éléments simples.*
INDICATION: *on pourra exprimer les coefficients de cette décomposition à l'aide des coefficients binomiaux.*

Exercice 252 *Soient* P, Q *deux polynômes à coefficients réels tels que* Q *est de degré* n *et admet* n *racines réelles distinctes notées* $x_1, .., x_n$ *; on suppose aussi que* P *est de degré strictement inférieur à* n.

1. *Justifier que* $Q'(x_k) \neq 0$ *pour tout* $k \leq n$.
2. *Montrer que* $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)(x-x_k)}$.
3. a) *En déduire que, si aucun des* x_k *n'est nul, alors* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i'(x_i)} = -\frac{1}{Q(0)}$.

   b) *Montrer que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Q'(x_k)} = 0$.

Exercice 253 *Soit* P *un polynôme scindé. Décomposer en éléments simples la fraction* $\frac{P'}{P}$. *En déduire que les racines de* P *appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de* P.

Exercice 254 1. *Montrer que, pour tout entier naturel* n, *il existe un polynôme* P_n *tel que*

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin((2n+1)\theta) = P_n(\sin(\theta))$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{P_n}$.

Exercice 255 *1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :*

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

b) Décomposer $\frac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 256 *Pour tout couples d'entiers naturels k, n, on pose $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$.*
Déterminer la forme irréductible des fractions rationnelles suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{X-\omega_k}$ *2.* $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}$ *3.* $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X-\omega_k}$

Résultat: $\frac{n}{X^n-1}$, $\frac{nX}{X^n-1}$ *et* $\frac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.

Exercice 257 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(e^{i\frac{2\pi}{n}}X) = F(X)$.*
Montrer qu'il existe une fraction $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(X) = G(X^n)$.

Exercice 258 *Déterminer la limite des suites définies pour tout entier $n > 0$ par :*

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$ *2.* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}$

Exercice 259 *Montrer qu'il n'existe pas d'intervalle $]a, b[$ avec $a < b$ sur lequel la fonction* sin *coïncide avec une fraction rationnelle.*
Indication: *on pourra utiliser le degré d'une fraction rationnelle et de ses dérivées.*

MPSI$_2$ **12**

Espaces vectoriels, applications linéaires

12.1 Structure d'espace vectoriel

Exercice 260 *1. Déterminer parmi les parties suivantes lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^2$ *:*

a) $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$

b) $\mathbb{Z}^2$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| = |y|\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + 2y = 0\}$

2. Déterminer parmi les parties suivantes lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ *:*

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 1\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z \geq 0\}$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ |x| = |y|\}$

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0 \text{ ou } x - y + z = 0\}$

g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\}$

Exercice 261 *Parmi les ensembles suivants (munis des lois d'addition et de composition externe usuels), lesquels sont des espaces vectoriels ?*

1. *l'ensemble des suites réelles convergentes*
2. *l'ensemble des suites réelles divergentes*
3. *l'ensemble des fonctions croissantes*
4. *l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle* $y' + y = 0$
5. *l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle* $y' + e^{-t}y = 0$
6. *l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle* $y' + y = 1$
7. *l'ensemble des fonctions lipschitziennes*

Exercice 262 *Soient* E *un espace vectoriel et* F, G *et* H *trois sous-espaces vectoriels de* E. *Montrer que la somme* $F + G + H$ *est directe si, et seulement si* $F \cap G = \{0\}$ *et* $(F + G) \cap H = \{0\}$.

Exercice 263 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *tels que* $F + G = E$. *Notons* F' *un supplémentaire de* $F \cap G$ *dans* F.
Montrer que $E = F' \oplus G$.

Exercice 264 *Soit* $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $F = \left\{f \in E,\ \int_0^1 f(t)\, dt = 0\right\}$.
Montrer que F *est un sous-espace vectoriel de* E *puis donner un supplémentaire de* F.

Exercice 265 *Soient u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,w)$ *si, et seulement si :*

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{K}^3, \qquad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \textit{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$

2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*
   Montrer que $F + \mathrm{Vect}(v) = F + \mathrm{Vect}(w)$ *si, et seulement si :*

$$\exists u \in F, \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \qquad u + \alpha v + \beta w = 0 \quad \textit{et} \quad \alpha\beta \neq 0$$

Exercice 266 *Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit E_a l'ensemble des fonctions de E s'annulant en a.*

1. *Montrer, que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Soit $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$.*
3. *La somme de E_a et de E_b peut-elle être directe ?*

Exercice 267 *Soient F, G et H trois sous-espace vectoriel de E.*
Montrer que $(F \cap H) + (G \cap H) \subset (F + G) \cap H$.
A-t-on égalité ?

Exercice 268 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E. Supposons que $F_n \not\subset F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$ et choisissons un élément x de F_n n'appartenant pas à $F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}$ et un élément y de E n'appartenant pas à F_n.*

1. *Montrer que $\lambda x + y \notin F_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *Montrer que pour tout entier $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.*
3. *Conclure que $\displaystyle\bigcup_{k \in [\![1,n]\!]} F_k \neq E$.*

12.2 Étude d'applications linéaires

Exercice 269 *Considérons $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x + y + z = 0\}$*

1. *Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer une famille génératrice.*
2. *Montrer que* $G = \mathrm{Vect}((2,1,0))$ *est un supplémentaire de F. Trouver un autre supplémentaire.*
3. *Déterminer la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.*
4. *Déterminer la symétrie de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.*

Exercice 270
1. *Trouver, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $C^\infty(\mathbb{R})$:*

$$f \mapsto f(0) \qquad f \mapsto f(1) - 1 \qquad f \mapsto f''(3) \qquad f \mapsto (f'(2))^2 \qquad f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$$

2. *Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Trouver, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$:*

$$f \mapsto f + \phi \qquad f \mapsto \phi f \qquad f \mapsto f \circ \phi \qquad f \mapsto \phi \circ f \qquad f \mapsto \int f \qquad f \mapsto f'$$

   Lesquelles sont des endomorphismes de $C^0(\mathbb{R})$?
   Pour quelles valeurs de ϕ, les endomorphismes $f \mapsto f \circ \phi$ et $f \mapsto f'$ commutent-ils ?

Exercice 271 *Déterminer le noyau et l'image des endomorphismes suivants de $\mathbb{R}_n[X]$:*

1. $P \mapsto P'$ 2. $P \mapsto X.P'$ 3. $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

Exercice 272 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $f_A \in \mathcal{L}(A,F)$ et $f_B \in \mathcal{L}(B,F)$.*
Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que :

$$\forall (a,b) \in A \times B, \qquad f(a) = f_A(a) \qquad f(b) = f_B(b)$$

Exercice 273 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\phi \in \mathcal{L}(E)$, $\psi \in \mathcal{L}(F)$, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

1. *Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $f = g \circ \phi$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\phi \subset \mathrm{Ker}f$.*
2. *Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $f = \psi \circ g$ si et seulement si $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}\psi$.*

Exercice 274 *Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que la suite des noyaux itérés $(\mathrm{Ker}f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.*
2. *Montrer que la suite des images itérées $(\mathrm{Im}f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.*
3. *Établir l'équivalence entre $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$ et $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0_E\}$.*
4. *Établir l'équivalence entre $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$ et $E = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f$.*

Exercice 275 *(Cas simple du lemme des noyaux)*
Soient a et b deux scalaires distincts et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$(f - aId_E) \circ (f - bId_E) = 0$$

1. *Montrer que $\mathrm{Ker}(f - aId_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - bId_E)$ sont supplémentaires.*
2. *Déterminer une expression simple de la projection p sur $\mathrm{Ker}(f - aId_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - bId_E)$*
3. *Montrer que $f = ap + b(Id_E - p)$. En déduire l'expression de f^n pour tout entier n.*

Exercice 276 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = Id_E$.*

1. *Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(f - Id_E) = E$.*
2. *Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id_E) = \mathrm{Im}(f^2 + f + Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - Id_E) = \mathrm{Ker}(f^2 + f + Id_E)$.*

12.3 Endomorphismes remarquables

Exercice 277

1. *Montrer que $(x,y,z) \mapsto (x,-z,-y)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera les éléments caractéristiques.*
2. *Montrer que $P \mapsto \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) - P$ est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera les éléments caractéristiques.*

Exercice 278 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f_0 un endomorphisme de E. Notons :*

$$\mathcal{C}(f_0) = \{f \in \mathcal{L}(E),\ f \circ f_0 = f_0 \circ f\}$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}(f_0)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.*
2. *Supposons que f_0 est un projecteur.*
   Montrer que $f \in \mathcal{C}(f_0)$ si, et seulement si f laisse stable le noyau et l'image de f_0.

Exercice 279 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E.*

1. *Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.*
2. *Supposons que p et q commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.*

Exercice 280 *Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = Id_E$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition associée.*

Exercice 281 *Considérons deux projections p et q sur le même sous-espace G (mais de directions différentes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est une projection sur G.*

Exercice 282 *Soit f une endomorphisme non-nul de E tel que, pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée. Montrer que f est une homothétie.*

MPSI$_2$ **13**

Espaces vectoriels de dimension finie

13.1 Familles libres, familles génératrices, bases

Exercice 283 *Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, les vecteurs $v_1 = (\lambda, 1, 1)$, $v_2 = (1, \lambda, 1)$ et $v_3 = (1, 1, \lambda)$ forment-il une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?*

Exercice 284 *Pour tout entier k, on définit*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = \cos(kx), \quad g_k(x) = \cos^k(x)$$

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(nx) = T_n(\cos(x))$$

   Déterminer le degré de T_n.

2. *En déduire que $\mathrm{Vect}(f_k)_{0 \leq k \leq n} = \mathrm{Vect}(g_k)_{0 \leq k \leq n}$.*

Exercice 285 *Soient $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de E_n définie par $P_0(X) = 1$ et pour tout $k \geq 1$:*

$$P_k(X) = \frac{X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)}{k!}$$

1. *Montrer que, si $n = 3$, $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de E_n.*
2. *Montrer que ce résultat reste vrai pour n quelconque.*
3. *On dit qu'une famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ de $E = \mathbb{R}[X]$ est échelonnée en degré si*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \deg P_{k+1} > \deg P_k.$$

   Montrer que toute famille échelonnée en degré de E, ne contenant pas le polynôme nul, est libre dans E.

Exercice 286 *Définissons les ensembles suivants :*
$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \quad \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3\}$
$V = \{f \in E : \quad f(1) = 0\} \qquad W = \{f \in E : \quad f'(2) = 0\}$

1. *Montrer que E, V et W sont des espaces vectoriels.*
2. *Déterminer des familles génératrices pour chacun de ces espaces ainsi que pour $V \cap W$.*
3. *Montrer que $E = V + W$.*

Exercice 287 *Considérons les applications suivantes définies de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$:*

$a: x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}$ $\qquad$ $c: x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}$

$b: x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}-x}$ $\qquad$ $d: x \mapsto \sqrt{\sqrt{1+x^2}-1}$

1. *Calculer $a+b$ et $a-b$ en fonction de c et de d.*
   INDICATION: *on pourra poser $x = \mathrm{sh}(t)$.*
2. *En déduire le rang de la famille (a,b,c,d).*

Exercice 288 *Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels deux à deux distincts.*
Montrer que la famille $(x \mapsto e^{a_i x})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre.

Exercice 289 *1. Le vecteur $(0,-1,3)$ de $\mathbb{R}^3$ appartient-il à $\mathrm{Vect}\{(2,1,3),(1,1,0)\}$?*

2. *Déterminer $\mathrm{Vect}\{(2,1,-1),(1,0,-1)\} \cap \mathrm{Vect}\{(-2,0,-1),(3,1,1)\}$.*
3. *Soient $V_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ et $V_2 = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$?*

Exercice 290 *Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et a_0 , a_1, a_2 trois nombres réels distincts.*
On définit, pour $i = 1,2,3$, une application φ_i sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi_i(P) = P(a_i)$$

1. *Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\varphi_i)_{i=1,2,3}$ est une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $H : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $H(P) = (P(a_1),P(a_2),P(a_3))$ est un isomorphisme.*
   Déterminer H^{-1}.
3. *On considère l'application $\varphi : P \mapsto \int\limits_a^b P(t)dt$.*

   Déterminer les constantes $(\alpha_i)_{i=1,2,3}$ telles que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i \varphi_i$.

Exercice 291 *Un polynôme trigonométrique de degré au plus n est une fonction*

$$T : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \end{cases}$$

avec $(a_0,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Définissons $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus n.

1. *Montrer que $\mathcal{T}_n$ est un espace vectoriel.*
2. *Soit $T \in \mathcal{T}_n$. Calculer les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)T(x)dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)T(x)dx$*
3. *Montrer que la famille composée des fonctions $x \mapsto \cos(kx)$pour $k \in [\![0,n]\!]$ et des fonctions $x \mapsto \sin(jx)$ pour $j \in [\![1,n]\!]$ est une base de $\mathcal{T}_n$.*
   Exprimer les coordonnées dans cette base.

Exercice 292 *Soit $\mathbb{R}^3$ rapporté à une base (e_1,e_2,e_3).*
Définissons les vecteurs $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 + e_3$ et $u_3 = e_1 + e_2$.
Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base et déterminer sa base duale en fonction de e_1^*, e_2^* et e_3^*.

Exercice 293 *Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $m = \frac{a+b}{2}$. Considérons les applications suivantes de $\mathbb{R}_3[X]$*

$$\varphi_a(P) = P(a) \qquad \varphi_b(P) = P(b) \qquad \varphi_c(P) = P(c) \qquad \psi(P) = \int_a^b P(t)dt$$

1. *Vérifier rapidement que ces applications sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_3[X]$.*
2. *Montrer que, si a, b et c sont deux à deux distincts, $(\varphi_a,\varphi_b,\varphi_c)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.*
3. *Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a :$\psi(P) = \frac{b-a}{6}(P(a) + 4P(m) + P(b))$.*

4. *Á quelle condition sur c la famille $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \psi)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?*

Exercice 294 *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Définissons $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles satisfaisant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} - (a+b+c)u_{n+2} + (ab+bc+ac)u_{n+1} - abcu_n = 0$$

1. *Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel et déterminer les suites géométriques de $\mathcal{S}$.*
2. *Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.*
3. *Déterminer une base de $\mathcal{S}$.*
   INDICATION: *on pourra commencer par le cas a, b et c deux à deux distincts.*

Exercice 295 *Considérons $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \geq 1$) et $P \in E$.*

1. *Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer la dimension de F_P en fonction du degré de P.*
2. *Soit $Q \in E$ un polynôme sans racine commune avec P, et tel que $\deg P + \deg Q = n+1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.*
3. *En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.*

Exercice 296 *Montrer qu'un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ne contenant que des applications de signe constant est de dimension au plus 1.*

13.2 Étude d'applications linéaires

Exercice 297 *Considérons $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ P \mapsto (X-1)P' - 2P \end{array} \right.$.*
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. A-t-on $f \in GL(E)$?

Exercice 298 *Soit f un endomorphisme d'un ev dont une base est (e_1, e_2).*

1. *Supposons $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = e_1$. Expliciter $f(x)$ et $f^2(x)$ en fonction des coordonnées de x dans la base (e_1, e_2).*
2. *Supposons dorénavant que $f^2 = 0$. Déterminer le rang de f puis trouver une base (u_1, u_2) telle que $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = u_1$.*

Exercice 299 *Soit E un ev de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit cyclique s'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), .., f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.*

1. *Montrer que si $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ alors f est cyclique.*
2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Montrer qu'il existe des nombres réels $(a_k)_{0\leq k \leq n-1}$ tels que*

$$f^n + \sum_{0\leq k\leq n-1} a_k f^k = 0$$

Exercice 300 *Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E, nilpotent d'indice p, i.e. un endomorphisme tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.*

1. *Justifier qu'il existe x_0 tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.*
2. *Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre. Comparer p et n.*
3. *Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\in[\![0,p]\!]}$ est strictement croissante.*
4. *Montrer que, si $p = n$, alors $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$. Étudier la réciproque.*
5. *Montrer que $Id_E - f$ est inversible et calculer son inverse.*

Exercice 301 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.*
Montrer que $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+1})$.

Exercice 302 *Considérons $E = \mathbb{R}_n[X]$ et posons $u(P) = X^n P(\frac{1}{X})$ pour tout $P \in E$.*

1. *Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.*
2. *Calculer u^2 puis caractériser u.*
   INDICATION: *on pourra discuter selon la parité de n.*

Exercice 303 *Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Montrer que* $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ *puis que* $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g)$.
2. *Déterminer* $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ *lorsque $f+g$ est bijectif et que $g \circ f = 0$.*

Exercice 304 *Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.*

1. *Étudier le noyau et l'image de l'application linéaire induite par g entre les espaces* $\mathrm{Im}(f)$ *et E.*
2. *Montrer que*
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f) + \dim(\mathrm{Ker}(g) \bigcap \mathrm{Im}(f))$$
3. *En déduire que* $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker}(g) + \dim \mathrm{Ker}(f)$ *et en particulier que :*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \dim \mathrm{Ker}(f^k) \leq k. \dim \mathrm{Ker}(f) \qquad Rg(f^k) \geq k.Rg(f) - n(k-1)$$

Exercice 305 *Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $u \circ v = 0_E$ et $u + v \in GL(E)$.*

1. *Que peut-on dire de* $\mathrm{Im}v$ *et* $\mathrm{Ker}u$ *?*
2. *Montrer que* $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim E$.

MPSI$_2$ **14**

Calcul matriciel

14.1 Premiers calculs

Exercice 306 *Soit G l'ensemble des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que c'est un groupe multiplicatif isomorphe au groupe additif réel.

Exercice 307 *(Rotations du plan)*
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer R_0.*
2. *Montrer que $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*
   En déduire que R_α est inversible et donner son inverse.
3. *Soit $S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $SR_\alpha S = R_{-\alpha}$.*
4. *Calculer $R_\alpha^2 - 2\cos(\alpha)R_\alpha + I$.*

Exercice 308 *Soient $s \neq 0$, t et u des nombres réels ; on définit les matrices suivantes :*

$$M(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{pmatrix} \qquad N(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \qquad P(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que si une matrice*
   $$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   peut être écrite sous la forme
   $$X = M(s)N(t)P(u)$$
   alors
   $$a \neq 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = 1$$
2. *Montrer que, si ces conditions sont vérifiées, il existe un unique triplet de réels (s, t, u) avec $s \neq 0$ tel que*
   $$X = M(s)N(t)P(u)$$

```
MAPLE>with(linalg) :
MAPLE>M :=matrix(2,2,[ s, 0, 0, 1/s]) : N :=matrix(2,2,[1,0,t,0]) :
P :=matrix(2,2,[1,u,0,1]) :
MAPLE>evalm(M&*N&*P);
```

$$\begin{pmatrix} s & su \\ \frac{t}{s} & \frac{tu}{s} \end{pmatrix}$$

Exercice 309 *1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :*

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad u(P) = P' + P$$

Écrire la matrice de u dans la base $1, X, X^2, X^3$.

2. *Déterminer la matrice de passage entre les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B}_1 = (1,2,1), (2,3,3), (3,7,1)$$
$$\mathcal{B}_2 = (3,1,4), (5,3,2), (1,-1,7)$$

14.2 Calcul de puissances

Exercice 310 *1. Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Calculer les puissances des matrices J, P et Q.

2. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q - I$.*

   Montrer que, pour tout entier k :

$$A^k = (-1)^k I + \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3} Q$$

Exercice 311 *Calculer A^n lorsque n est un entier et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

Exercice 312 *Considérons la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que : $(A - 6I_3)\left(A^2 - 3I_3\right) = 0_3$.*
2. *Trouver une matrice B telle que $AB = BA = I_3$.*
3. *Calculer A^n pour tout entier n.*

Exercice 313 *Considérons les matrices :*

$$C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad\qquad L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

Calculer LC, CL, $(LC)^n$ et $(CL)^n$, pour tout entier n.

Exercice 314 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par*

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} \qquad v_{n+1} = 3v_n + 2w_n \qquad w_{n+1} = v_n + 2w_n.$$

et par $u_0 \geq 0$, $v_0 = u_0$ et $w_0 = 1$

1. *Montrer que : $\forall n \geq 0, \qquad u_n = \frac{v_n}{w_n}$*
2. *Définissons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.*
   a) *Vérifier, pour tout entier n, que $\begin{pmatrix} v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$*
   b) *Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que : $\forall n \geq 0, \qquad A^n = PD^nP^{-1}$*
   c) *En déduire l'expression de v_n et de w_n en fonction de n puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Exercice 315 *Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $(\varphi(P))(X) = P(X+1)$.*

1. *Déterminer la matrice A de φ dans la base $(X^k)_{0\leq k\leq n}$*
2. *A l'aide de φ^{-1}, déterminer A^{-1}.*
3. *Application :*
   On veut dénombrer l'ensembles des surjections de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$ (avec $n \geq p$).
   On note
   · $F_{n,p}$ l'ensemble des applications de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$.
   · $S_{n,p}$ l'ensembles des surjections de $\{1,..,n\}$ dans $\{1,..,p\}$.
   · $F(n,p) = card(F_{n,p})$ et $S(n,p) = card(S_{n,p})$.
   a) *Calculer $F(n,p)$.*
   b) *Montrer que $F(n,p) = \sum\limits_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S(n,k)$.*
   c) *Vérifier que*
   $$\begin{pmatrix} F(n,n) \\ F(n,n-1) \\ \vdots \\ F(n,1) \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S(n,n) \\ \vdots \\ S(n,2) \\ S(n,1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   En déduire $S(n,p)$.

14.3 Systèmes linéaires

Exercice 316 *Trouver, en discutant sur la valeur du paramètre réel a, l'ensemble des solutions des systèmes suivants :*

$$\left\{\begin{array}{rl} x + ay + 2az &= -2 \\ ax + y + az &= 0 \\ 2ax + 2ay + z &= 1 \\ (2a+1)x + 3ay + (2a+1)z &= -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rl} x + ay + 2az &= 0 \\ ax + y + az &= 0 \\ 2ax + 2ay + z &= 1 \\ (2a+1)x + 3ay + (2a+1)z &= -1 \end{array}\right.$$

Exercice 317 *Déterminer le nombre de solutions du système suivant selon la valeur du paramètre réel a :*

$$\left\{\begin{array}{rl} x + y - z &= 1 \\ x + ay + 3z &= 2 \\ 2x + 3y + az &= 3 \end{array}\right.$$

Exercice 318 *Trouver les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les systèmes suivants admettent une solution non-nulle :*

1. $$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + (4-\lambda)y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + (9-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} (2-\lambda)x + 3y - 3z = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y - 3z = 0 \\ 3x + 3y - (4+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 319 *Calculer, en fonction du réel λ, le rang des matrices suivantes et calculer leurs inverses (lorsque cela est possible).*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Exercice 320 *Résoudre les équations suivantes :*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
3. $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
MAPLE>with(linalg) :
MAPLE>A :=matrix([[2,5],[1,3]]) :B :=matrix([[4,-6],[2,1]]) :
MAPLE>linsolve(A,B);
```

$$\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

14.4 Rang, image et noyau

Exercice 321 1. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ *et* $\mathrm{Im} f$.

2. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :*

$$\begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de f, puis exhiber une base et des équations de $\mathrm{Ker} f$ *et* $\mathrm{Im} f$.

Exercice 322 *On pose* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Pour quelle valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle inversible ?*
2. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(A - I_3)$ *est de dimension* 2 *et* $\operatorname{Ker}(A + 3I_3)$ *est de dimension* 1.
3. *Soient (e_1, e_2) une base de $Ker(A - I_3)$ et (e_3) une base de* $\operatorname{Ker}(A + 3I_3)$.
   a) *Montrer que : $P = \big(e_1\ e_2\ e_3\big) \in GL_3(\mathbb{R})$.*
   b) *Calculer $P^{-1}AP$. En déduire A^n.*

Exercice 323 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r \notin \{0, \min(n,p)\}$.*
1. *Considérons $V \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que AV soit échelonnée en colonne.*
   a) *Montrer que $(C_{r+1}(V), \ldots, C_p(V))$ est une base de* $\operatorname{Ker}A$.
   b) *Montrer que $(C_1(AV), \ldots, C_r(AV))$ est une base de* $\operatorname{Im}A$.
2. *Considérons $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que UA soit échelonnée en ligne.*
   a) *Montrer que $L_1(UA)X = \ldots = L_r(UA)X = 0$ est un système d'équations de* $\operatorname{Ker}A$.
   b) *Montrer que $L_{r+1}(U)X = \ldots = L_n(U)X = 0$ est un système d'équations de* $\operatorname{Im}A$.

14.5 *Varia*

Exercice 324 *Soient deux matrices carrées A et B qui commutent, i.e. telles que $AB = BA$. Montrer que : $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ puis que*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Montrer que la première propriété est fausse si $AB \neq BA$.

Exercice 325 *Pour tout réel t, on définit la matrice $A(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{M} = \{A(t),\ t \in \mathbb{R}\}$.
1. *Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit matriciel.*
2. *Pour quelles valeurs de t, la matrice $A(t)$ est-elle inversible ? Son inverse appartient-il à $\mathcal{M}$?*
3. *Calculer $(A(-1))^n$ pour tout entier naturel n.*

Exercice 326 *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.*

Exercice 327 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n, i.e. telle que : $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.*
Montrer que A est semblable aux deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 328 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, i.e. telle que :*

$$\forall i \in \{1,..,n\} \qquad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

MPSI$_2$ 15

Déterminants

15.1 Calculs

Exercice 329 *Calculer les déterminants suivants :*

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -5 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -7 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ *avec* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix}$

```
MAPLE>with(linalg) :
MAPLE>det(matrix(4,4,[[1,0,3,2],[-1,1,8,-5],[2,0,6,3],[-1,0,-3,-7]]));

                                   0
```

Exercice 330 *Calculer et factoriser les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 331 *Calculer les déterminants suivants :*

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 332 *Calculer* $\det A$ *pour* $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par :*

1. $a_{i,j} = \max(i,j)$
2. $a_{i,j} = \min(i,j)$
3. $a_{i,j} = |i-j|$
4. $a_{i,j} = \binom{n+i-1}{j-1}$

5. $a_{i,j} = \delta_{ij} + \alpha_i\beta_j$
6. $a_{i,j} = 1 + \alpha_i^j$
7. $a_{i,j} = (\alpha_i + \beta_j)^{n-1}$

Exercice 333 *Soient n un entier naturel et $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \cdots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \cdots & P(2n-1) \end{vmatrix}.$$

15.2 Déterminants classiques

Exercice 334 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$. Le déterminant de Vandermonde est définit par :*

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Montrer, par récurrence, que :

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

1. *en utilisant la méthode du pivot de Gauss*
2. *en étudiant le polynôme $V(x_0, \ldots, x_n, X)$*

Exercice 335 *(Déterminant circulant) Soient $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{\frac{i2\pi}{n}}$. On pose*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer $A\Omega$ en fonction de ω et de $P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^{k-1}$.*
2. *En déduire que $\det A = P(1)P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1})$.*
3. *Calculer pour $a \in \mathbb{C}$*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \ldots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \ldots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \ldots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

15.3 Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 336 *Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Calculer $\det u$ dans chacun des cas suivants :*

1. *$E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : P \mapsto P(X+1) - P(X)$.*

2. $E = \mathbb{K}_n[X]$ *et* $u : P \mapsto P(X+1)$.
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $u(X) = AX$ *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est une matrice fixée.*
   INDICATION: *on pourra étudier les termes colonne par colonne.*

Exercice 337 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E. On note* det *le déterminant dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que pour toute famille de n vecteurs $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$,*

$$\begin{aligned}\det(f(u_1), u_2, \ldots, u_n) + \det(u_1, f(u_2), \ldots, u_n) + \cdots + \det(u_1, u_2, \ldots, f(u_n))\\ = tr(f)\det(u_1, u_2, \ldots, u_n).\end{aligned}$$

15.4 Comatrice

Exercice 338 *Montrer que la comatrice d'une matrice triangulaire est triangulaire. La réciproque est-elle vraie ?*

Exercice 339 *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que* $Com(AB) = Com(A).Com(B)$.

15.5 *Varia*

Exercice 340 *Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que* $\det(A + \lambda B)$ *est un polynôme en λ de degré n. Déterminer les coefficients de plus haut et de plus bas degré.*
2. *En déduire que si A est une matrice inversible, pour toute matrice B, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A + \varepsilon B$ soit aussi inversible pour tout $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.*

Exercice 341 *Soit $SL_n(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et de déterminant* 1.

1. *Montrer que $SL_n(\mathbb{Z})$ est un groupe pour la multiplication des matrices.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A admet un inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si* $\det A = \pm 1$.
3. *Soit $A \in SL_n(\mathbb{Z})$. Calculer le pgcd des coefficients d'une ligne de A.*
4. *Montrer que tout élément de $SL_n(\mathbb{Z})$ est un produit de matrices de la forme $I_n \pm E_{i,j}$ $(i \neq j)$.*
   Décomposer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 342 *Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *En remarquant que* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$, *calculer le déterminant de* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
2. *On suppose de plus A inversible et $AC = CA$. Posons* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.
   Montrer que $\det M = \det(AD - CB)$.
   INDICATION: *on décomposera M comme un produit de deux matrices triangulaires par blocs.*

Exercice 343 *Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que* $\det(I_p - AB) = \det(I_q - BA)$.
INDICATION: *on pourra commencer par le cas $A = J_r$.*

Exercice 344 *Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n et semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 345 *Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que* $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. *Montrer qu'il existe U et V deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $UA + VB = I_n$.*

MPSI$_2$ 16

Espaces euclidiens

16.1 Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 346 *Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur l'espace indique :*

1. $< x, y >= x_1y_1 + 2007x_2y_2 + \frac{3}{2}x_3y_3 + \frac{5}{2}x_4y_4$ *sur* $\mathbb{R}^4$
2. $< x, y >= 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
3. $< f, g >= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$ *sur* $\mathcal{C}^1([0, 1])$

Exercice 347
1. *Montrer que l'application* $(A, B) \mapsto tr({}^tAB)$ *définit un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *pour lequel la base canonique est orthonormée.*
2. *Montrer que pour tout* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|trA| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
3. *Déterminer l'orthogonal de l'espace des matrices symétriques.*

Exercice 348 *Considérons* $\mathbb{R}_n[X]$ *muni du produit scalaire* $< P, Q >= \int\limits_0^1 P(x)Q(x)dx$. *Posons* L_k *le polynôme égale à la dérivée k-ème de* $[X(X-1)]^k$ *pour* $k \leq n$.

1. *Montrer que la famille* $(L_k)_{k\leq n}$ *est orthogonale.*
2. *Calculer la norme euclidienne de* L_k *pour* $k \leq n$.
   RÉSULTAT: $\|L_k\| = \frac{k!^2}{2k+1}$

Exercice 349 *Soit* $E = \mathbb{R}_n[X]$ *muni de* $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

1. *Déterminer le degré d'un polynôme* P *non-nul de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.
2. *Soit* $\Phi : x \mapsto \int\limits_0^1 P(t)t^x dt$. *Montrer que* Φ *est une fonction rationnelle.*
3. *Trouver* Φ *à une constante multiplicative près.*
4. *En déduire les coefficients de* P.
5. *En déduire une base orthogonale de* E.

Exercice 350 *Soit* $E = \mathcal{C}([0, 1])$ *muni du produit scalaire :* $< f, g >= \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$, *et* $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.
Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 351 *Considérons* $\mathbb{R}_2[X]$ *muni du produit scalaire :* $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
Trouver un polynôme A *tel que la forme linéaire* $\varphi : P \mapsto P(0)$ *vérifie*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \varphi(P) =< A, P >$$

Exercice 352 *Considérons un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'une norme* N *vérifiant l'identité du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in E, \qquad N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2)$$

Posons pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(N(x+y)^2 - N(x-y)^2)$.

1. *Vérifier que* φ *est symétrique.*
2. *Montrer que pour tous* $x, y, z \in E$,
$$\varphi(x+y, z) + \varphi(x-y, z) = 2\varphi(x, z)$$
3. *En déduire que pour tous* $x, y, z \in E$,
$$\varphi(x, z) + \varphi(y, z) = \varphi(x+y, z)$$
4. *Conclure que* φ *est bilinéaire et donc un produit scalaire.*

Exercice 353 *Soient* E *un espace euclidien, et* $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille libre de* E.

1. *Montrer qu'il existe une famille de vecteurs unitaires* $(u_1, \ldots, u_n)$ *vérifiant pour tout* $i, j \leq n$ *:*
$$\|u_i - u_j\| = 1$$
$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_i) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i).$$
2. *Montrer que toute famille* $(u_1, \ldots, u_n)$ *vérifiant pour tout* $i, j \leq n$ *:*
$$\|u_i - u_j\| = 1$$
est libre.

Exercice 354 *Une frame d'un espace euclidien* E *est une famille* $(x_i)_{i \in I}$ *de vecteurs de* E *telle qu'il existe* $A, B > 0$ *vérifiant :*

$$\forall x \in E, \qquad A\|x\|^2 \leq \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle^2 \leq B\|x\|^2$$

1. *Déterminer une frame à trois éléments de* $\mathbb{R}^2$.
2. *Montrer qu'une frame* E *est une famille génératrice de* E.
Indication: *: on pourra considérer l'orthogonal de cette famille.*
3. *Montrer qu'une frame telle que* $A = B = 1$ *est une base orthogonale.*

16.2 Projections orthogonales, distance

Exercice 355 *Soient* E *un espace euclidien dont une base orthonormée est* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ *et* F *le sous-espace d'équations dans* $\mathcal{B}$ *:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1. *Trouver une base orthonormée de* F.

2. *Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.*
3. *Calculer $d(e_1, F)$.*

Exercice 356 *Considérons H le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (-2,0,1,1)$, $u_3 = (0,1,0,1)$.*

1. *Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et en donner un équation.*
2. *Donner un vecteur normal unitaire à H (pour le produit scalaire canonique).*
3. *Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H (puis de la symétrie orthogonale associée).*

Exercice 357 *Considérons $\mathbb{R}_n[X]$ avec le produit scalaire suivant : pour tout $P = \sum\limits_i a_i X^i$ et $Q = \sum\limits_i b_i X^i$, $< P, Q >= \sum\limits_i a_i b_i$. Posons $H = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$.*

1. *Trouver une base orthonormale de H.*
2. *Montrer que $d(X, H) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.*

Exercice 358 *Trouver le minimum global de $(\alpha, \beta) \mapsto \int\limits_0^\pi \left(\sin(x) - \alpha x^2 - \beta x\right)^2 dx$.*

Exercice 359 *Considérons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.*

Exercice 360 *Soient F, G deux sous-espaces d'un espace euclidien E tels que $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux. Notons p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = Id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.*

Exercice 361 *Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|$.*

Exercice 362 *Soient u, v deux vecteurs non colinéaires d'un espace euclidien. Déterminer les extrema de la fonction $f : x \mapsto \frac{\langle x,u\rangle\langle x,v\rangle}{\|x\|^2}$.*
Indication: *on pourra commencer par se ramener au plan engendré par u et v.*

16.3 Matrices

Exercice 363
1. *Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T, uniques telles que $M = PT$.*
2. *Soit E un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs quelconques. Montrer que $|\det_{(e_i)}(u_j)| \leq \prod_j \|u_j\|$.*
Étudier les cas d'égalité.

Exercice 364 *Considérons n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace euclidien E et F le sous-espace engendré par ces vecteurs. La matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est la matrice $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j\leq n}$.*

1. *Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si $G(x_1, ..., x_n)$ n'est pas inversible.*
2. *Montrer que*
$$\det G(x_1, \dots, x_n) = [\det(x_1, \dots, x_n)]^2.$$
Indication: *on pourra introduire la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans une base orthonormée.*
3. *Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}$.*

Exercice 365 *Soient E un espace euclidien et $e_1, \ldots, e_n$ tels que :*

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2$$

1. *Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.*
2. *Supposons, dans cette question, que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont unitaires. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.*
3. *Supposons, dans cette question, que* $\dim E = n$.
   a) *Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.*
   b) *Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, \qquad < x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} < x, e_i >< y, e_i >$.*
   c) *Soit G la matrice de Gram associée à $e_1, \ldots, e_n$. Montrer que $G^2 = G$ et conclure.*

16.4 Endomorphismes orthogonaux ou symétriques

Exercice 366 *Soient E un espace euclidien, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x - \lambda < u, x > u$$

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles f est un endomorphisme orthogonal. Reconnaître alors l'endomorphisme f.

Exercice 367 *Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E tels que* $\dim F = \dim G$. *Montrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que $f(F) = G$.*

Exercice 368 *On considère sur $E = \mathbb{R}_n[x]$ le produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ et l'endomorphisme u défini par*

$$u(P)(X) = 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X)$$

Montrer que u est symétrique pour ce produit scalaire $<,>$.

Exercice 369 *Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien. Montrer que $f \circ g$ est symétrique si et seulement si f et g commutent.*

Exercice 370 *Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que deux des propriétés suivantes impliquent la troisième :*

1. *f est un endomorphisme orthogonal*
2. *$f^2 = -Id_E$*
3. *$\forall x \in E, \qquad \langle f(x), x \rangle = 0$*

Exercice 371 *Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que f commute avec f^* si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.*
2. *Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :*
   – *f et f^* ont les mêmes sous-espaces stables.*
   – *L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f.*
3. *Considérons un endomorphisme f tel que f et f^* commutent et un sous-espace vectoriel F tel que $f(F) \subset F$. Montrer que $f(F^\perp) \subset F^\perp$.*
   INDICATION: *on pourra écrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.*

MPSI$_2$ **17**

Isométries

17.1 Isométries vectorielles du plan ou de l'expace

Exercice 372 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad S_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$$

1. *Calculer les produits matriciels R_tS_s, S_sR_t, R_tR_s et S_tS_s.*
2. *En déduire $S_sR_tS_s$, $R_tS_sR_t$ et $R_{-t}S_sR_t$.*
3. *Interpréter géométriquement ces résultats.*

Exercice 373 *Déterminer la matrice dans la base canonique des isométries suivantes de l'espace :*

1. *la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par le vecteur $(1,1,1)$.*
2. *la rotation ρ telle que $\rho(1,-1,1) = (1,-1,1)$ et $\rho(1,0,0) = (0,0,1)$.*

Exercice 374 *Soit u un vecteur de l'espace de norme 1.*

1. *Rappeler l'expression de la projection orthogonale d'un vecteur x sur la droite vectorielle engendrée par u.*
2. *En déduire que l'image de x par la rotation d'angle θ et d'axe orienté par u est :*

$$2\sin(\frac{\theta}{2})^2\langle x,u\rangle u + \cos(\theta)x + \sin(\theta)u \wedge x$$

Exercice 375 *Déterminer a, b, c tels que la matrice*

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & a & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & b \\ c & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

soit la matrice d'une rotation. Déterminer ses éléments propres ?

Exercice 376 *Identifier l'endomorphisme canoniquement associé aux matrices suivantes :*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice 377 *Soit $u = (a, b, c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.*
2. *Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par u et d'angle $\frac{\pi}{2}$.*
3. *Caractériser géométriquement $\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$.*

Exercice 378 *Montrer que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ est la matrice d'une rotation si et seulement si il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$.*

17.2 Applications affines

Exercice 379 *Soient f une application affine du plan et h une homothétie. Montrer que $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques à l'aide de ceux de h.*

Exercice 380 *Soient A, B, C, D quatre points deux à deux distincts du plan affine et f une application affine telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$ et $f(D) = A$.*

1. *Montrer que si A, B et C sont non-alignés, alors $ABCD$ est un parallélogramme.*
2. *Montrer que si A, B et C sont alignés, alors B, C et D sont alignés ; en déduire que ces points ne peuvent être deux à deux distincts.*

Exercice 381 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et f une application affine telle que f^p est l'identité du plan. Montrer que f admet un point fixe.*

Exercice 382 *Soit f une application affine du plan affine, distincte de l'identité et vérifiant $f^3 = Id$.*

1. *Montrer que si $A \neq f(A)$, alors A, $f(A)$ et $f^2(A)$ ne sont pas alignés.*
2. *En déduire que f est la composée de deux symétries.*

Exercice 383 *Soit f une application affine telle que la distance entre M et $f(M)$ est constante pour tout point M de l'espace.*
Montrer que f est une translation.

17.3 Isométries et similitudes affines

Exercice 384 *Déterminer l'expression analytique de l'application du plan obtenue comme composition de la réflexion par rapport à la droite d'équation $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = \alpha$ et de la translation de vecteur $\beta(\sin(\theta), -\cos(\theta))$.*

Exercice 385
1. *Déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 1$ et de direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.*
2. *Reconnaître l' application dont l'expression analytique est :*

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 4y + 2z - 4 \\ y' &= -2x - 3y - 2z + 4 \\ z' &= 4x + 8y + 5z - 8 \end{aligned}$$

Exercice 386 *Déterminer l'application affine définie par*

$$f : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{7}(2x + 3y + 6z - 1, 3x - 6y + 2z + 9, 6x + 2y - 3z + 4)$$

Exercice 387 *Soient D, D' deux droites distinctes du plan, sécantes en O et $\mathcal{H}$ l'ensemble des points équidistants à D et D'.*

1. *Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires.*
2. *Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathcal{H}$.*
3. *Montrer qu'un cercle $\mathcal{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathcal{H}$.*

Exercice 388 *Soit ABC (dans l'ordre triognométrique) un triangle d'angles α, β, γ.*
Considérons ρ, ρ', ρ'' les rotations autour de A, B, C d'angles α, β, γ, orientés dans le sens trigonométrique.
Montrer que $\rho \circ \rho' \circ \rho''$ est la rotation d'angle π autour d'un point que l'on déterminera.
RÉPONSE : *Le point d'intersection du cercle inscrit avec le côté AC.*

Exercice 389 *On se place dans l'espace orienté de dimension 3.*

1. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une symétrie et une translation commutent.*
2. *Montrer qu'une application affine f est le produit d'une symétrie et d'une translation qui commutent si et seulement si $f \circ f$ est une translation.*
3. *En déduire que le produit d'une symétrie par une translation est le produit d'une symétrie et d'une translation qui commutent.*

Exercice 390 *Soient $\mathcal{C}$ un cercle du plan de centre O et f une application affine conservant $\mathcal{C}$.*
Montrer que f est une isométrie de point fixe O.

Exercice 391 *Soit G un sous-groupe fini de déplacements du plan.*

1. *Montrer que G est constitué uniquement de rotations.*
2. *Soient $f, g \in G$. Montrer que f et g ont même centre.*
   INDICATION: *on pourra étudier $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$.*
3. *Prouver enfin que G est enegendré par un élément (et donc cyclique car G est fini).*

Exercice 392 *Trois figures du plan F_1, F_2, F_3 se déduisent l'une de l'autre par rotations.*
Montrer qu'il existe une figure F dont F_1, F_2, F_3 se déduisent par réflexion.

Exercice 393 *Soient trois droites D_1, D_2, D_3 et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les demi-tours ou retournements correspondants (i.e. les rotation d'angle π autour de ces droites).*
Montrer que $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ est un demi-tour si et seulement si les droites D_1, D_2, D_3 ont une perpendiculaire commune ou sont parallèles.
INDICATION: *on remarquera que $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est un vissage.*

Exercice 394 *Soient f, g deux vissages d'angles différents de π. Montrer que f et g commutent si et seulement si ils ont le même axe.*
INDICATION: *on pourra étudier $f \circ g \circ f^{-1}$.*

Troisième partie

Analyse

MPSI$_2$ 18

Suites numériques

18.1 Parties de $\mathbb{R}$

Exercice 395 *1. Montrer qu'un réel dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang est rationnel.*

2. Montrer la réciproque.

Exercice 396 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$$

Exercice 397 *Soit $0 < a < b$. Déterminer le maximum de l'ensemble*

$$\left\{ \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, k \in [\![0, n]\!] \right\}$$

Exercice 398 *Montrer que l'ensemble* $\left\{ \dfrac{p}{2^q},\ q \in \mathbb{N}^*, \quad p \in [\![1, 2^q]\!] \right\}$ *est dense dans* $[0, 1]$.

Exercice 399 *Soit G un sous-groupe non-trivial de $\mathbb{R}$ et posons $\alpha = \inf\{x \in G,\ x > 0\}$.*

1. a) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.

b) Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $D = \left\{ 2^a 5^b \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 400 *Préciser les intersections suivantes :*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$$

Exercice 401 *Soit α un nombre irrationnel. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$.*

1. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout entier n et que $u_n \neq u_m$ dès que $n \neq m$.

2. Montrer que, pour tout entier N, il existe $n, m \in [\![1, N + 1]\!]$ tels que

$$|u_n - u_m| \leqslant \frac{1}{N}$$

Indication: *on pourra écrire $[0, 1]$ comme la réunion de N intervalles de longueurs $\frac{1}{N}$.*

3. *En déduire que, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe des entiers* $p, q \in \mathbb{Z}^\times$ *tels que*

$$0 < |p\alpha + q| < \varepsilon$$

4. *Encadrer* $x - (p\alpha + q)E(\frac{x}{p\alpha+q})$*.*
   En déduire que l'ensemble $\{n\alpha + m,\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 402 1. *Soient* A *et* B *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$\forall (a, b) \in A \times B \qquad a \leq b$$

Montrer que $\sup A$ *et* $\inf B$ *existent et que* $\sup A \leq \inf B$*.*

2. *Exhiber un exemple de parties* A *et* B *telles que* $\sup A = \inf B$ *et*

$$\forall (a, b) \in A \times B \qquad a < b$$

Exercice 403 *Soit* A *une partie bornée non vide de* $\mathbb{R}$*. Montrer que*

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x - y| = \sup A - \inf A$$

Exercice 404 *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$ *et* a *sa borne supérieure. Supposons que* $a \notin A$*.*

1. *Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une infinité d'éléments de* A *dans* $]a - \varepsilon, a]$*.*
2. *Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* x *et* y *distincts dans* A *tels dont la distance entre* x *et* y *est plus petite que* ε*.*

Exercice 405 *Déterminer, lorsque c'est possible, les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments des parties de* $\mathbb{R}$ *suivantes :*

1. $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{p},\ (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$
2. $B = \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $C = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^p,\ (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\}$

Exercice 406 *Soit* $A = \left\{\left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n},\ (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$*.*
Montrer que A *est majorée non vide puis calculer sa borne supérieure.*

Exercice 407 *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* A *et* B *deux parties de* $\mathbb{R}$ *non vides et majorées. Considérons :*

$$C = \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\} \qquad D = \{\lambda \cdot a,\ a \in A\} \qquad E = \{a \cdot b,\ (a, b) \in A \times B\}$$

1. *Montrer que* $\sup C = \sup A + \sup B$*.*
2. *Prouver l'existence, sous de bonnes hypothèses additionnelles, de* $\sup D$*,* $\sup E$*.*

Exercice 408 *Soit* B *une partie de* $\mathbb{R}$ *non majorée. Définissons pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, la partie* $B_n = \left\{\frac{1}{n}x,\ x \in B\right\}$*. Montrer que* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 409 *Soient* $(x_k)_{k\leq n}$ *et* $(y_k)_{k\leq n}$ *deux suites strictement décroissantes.*

1. *Montrer que, pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq \sum_{k=1}^{n} x_k y_{\sigma(k)}$$

   INDICATION: *on pourra commencer par considérer les transpositions.*

2. *En déduire que, pour tout* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_{\sigma(k)})^2$$

18.2 Convergence de suites

Exercice 410 *Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

1. $u_n = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$ *pour* $a \in \mathbb{R}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \frac{2+\sqrt{n}}{3\sqrt{n+1}}$
4. $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$
5. $u_n = \sin(\frac{2n\pi}{3})$
6. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$
7. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
8. $u_n = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{n}\right)^n$
9. $u_n = \frac{\sin n}{n}$
10. $u_n = \frac{\exp(-n^2)}{n}$
11. $u_n = \frac{e^{-n}}{\log(n+3)}$

Exercice 411 *En utilisant des majorations ou des minorations, étudier la convergences des suites définies pour $n \neq 0$ par :*

1. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
2. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$
3. $u_n = n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$

Exercice 412 *Donner un équivalent simple des suites définies par :*

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
2. $u_n = 2^{n+1} - 2^n$
3. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
4. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$
5. $u_n = \frac{1}{n} + e^{-n}$
6. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$

Exercice 413 *Déterminer un éauivalent simple de* $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} e^{\sqrt{k}}$. Indication: *on pourra encadrer avec des intégrales.*
Résultat: $2ne^{\sqrt{n}}$

Exercice 414 *Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout entier n, par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln(n)$$

1. *Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *En déduire un encadrement, puis un équivalent, de* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 415 *Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par* $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

1. *Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l.*
2. *Encadrer $n!.l$ et montrer par l'absurde que $l \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 416 *Soit k un entier non nul ; définissons* $u_n = \sum\limits_{l=n+1}^{kn} \frac{1}{l}$.
Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 417 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$.*

1. *Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *On pose $u_n = f^{-1}(n)$ pour tout $n > 0$.*
   a) *Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   b) *Montrer que, pour tout entier n non-nul, $n - \ln(n) \leq u_n \leq n$.*
   En déduire un équivalent de u_n
   c) *On pose, pour tout entier n non-nul, $v_n = u_n - n$.*
   Montrer que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$

d) Montrer que : $u_n \underset{+\infty}{=} n - \ln(n) - \dfrac{\ln(n)}{n} + o(\dfrac{1}{n})$

Exercice 418 *1. Soient $x \in \mathbb{R}$ irrationnel, $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ deux suites d'entiers telles que $q_n \neq 0$ pour tout entier n et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_n$ converge vers x. Montrer que $|p_n|$ et $|q_n|$ tendent vers $+\infty$.*

2. *Montrer le critère d'irrationalité d'Apéry :*
   Soit $x \in \mathbb{R}$; s'il existe deux suites d'entiers strictement positifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0$ avec $|q_n x - p_n| > 0$ pour une infinité de n alors x est irrationnel.
3. *Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n!}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$*
   - *a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n}(e^2 - 1) - a_n = 0$.*
   - *b) Montrer que si l'on pose $f(n) = \frac{n!}{2^n}$ alors $2f(2^k)$ est entier pour tout entier naturel k.*
   - *c) En déduire que pour tout entier naturel k, a_{2^k} est entier.*
   - *d) Conclure que e^2 est irrationnel.*

Exercice 419 *On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont du même ordre de grandeur, et on note $u_n = \Theta(v_n)$, si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.*

1. *Montrer que Θ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $n^\alpha = \Theta(n^\beta)$ si et seulement si $\alpha = \beta$.*
3. *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite l. Que dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \Theta(v_n)$? d'une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \Theta(w_n)$?*

Exercice 420 *Considérons la suite définie par (u_n) pour tout entier n par $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$.*

1. *Montrer que u_n est croissante pour $p^2 < n < (p+1)^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.*
2. *Exhiber des suites extraites de (u_n) de limite 0 et 1.*
3. *Montrer que tout réel $x \in]0,1[$ est une valeur d'adhérence de (u_n).*

Exercice 421 *En admettant que π est irrationnel, montrer que les suites $(\cos n)_n$ et $(\sin n)_n$ sont denses dans $[-1,1]$.*
INDICATION: *: on pourra commencer par montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

18.3 Suites définies par récurrence

Exercice 422 *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.*

Exercice 423 *1. Trouver toutes les suites géométriques $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $g_{n+1} - g_n \sim \frac{1}{\sqrt{g_n}}$*

2. *Trouver toutes les suites de la forme $(v_n = A.n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $v_{n+1} - v_n \sim \frac{1}{\sqrt{v_n}}$*
3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 424 *Considérons les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ définies par $a_1 = 4$, $b_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:*

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que*
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$$
2. *Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
3. *Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.*
4. *Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.*
5. *En déduire que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).*

Exercice 425 1. *Soit a un complexe non nul. Déterminer l'ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad au_n + (a^2+1)u_{n+1} + au_{n+2} = 0$$
2. *Trouver l'ensemble des complexes λ tels que le système suivant admette une solution non-nulle $(x_1, ..., x_n)$:*
$$\begin{cases} & (\lambda^2+1)x_1 & +\lambda x_2 & = 0 \\ \lambda x_k & +(\lambda^2+1)x_{k+1} & +\lambda x_{k+2} & = 0 \qquad \textit{pour } 1 \leq k \leq n-2 \\ \lambda x_{n-1} & +(\lambda^2+1)x_n & & = 0 \end{cases}$$

Exercice 426 *Condiérons A_0, A_1, A_2 trois points du plan et construisons la suite de points définie par la relation de récurrence :*
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A_{k+3} = bar((A_k, 2), (A_{k+1}, 1), (A_{k+2}, 1))$$
Montrer que cette suite converge vers l'isobarycentre de A_0, A_1, A_2.

Exercice 427 *Étudier les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $0 < a_0 < b_0$ et par les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n^2}{a_n + b_n}$$

Exercice 428 *Soit $\lambda > 1$. À toute suite $(u_n)_n$ on associe la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \lambda u_{n+1} + u_n$.*
Montrer que $(u_n)_n$ converge si et seulement si $(v_n)_n$ converge.

Exercice 429 *Considérons deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $(a_n + b_n)_n$ et $(e^{a_n} + e^{b_n})_n$ convergent vers l et l'.*
1. *Montrer que si $l = 0$ et $l' = 2$, alors $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers des limites que l'on précisera.*
2. *Que dire si $l = 0$ et $l' \neq 2$?*

MPSI$_2$ **19**

Limites et continuité des fonctions réelles

19.1 Fonctions continues

Exercice 430 *Est ce que la fonction* $x \mapsto \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$ *admet une limite en* $+\infty$ *?*

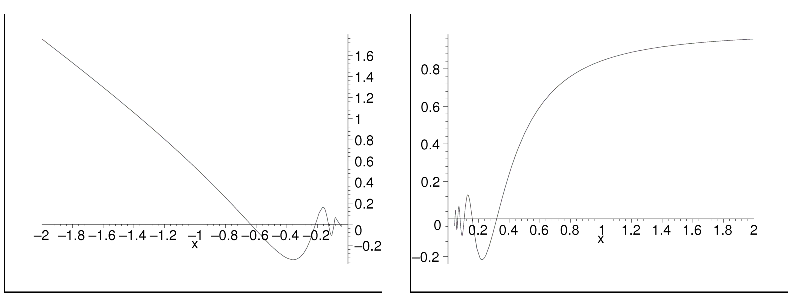
Exercice 431 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

1. *Étudier la continuité de* f.
2. *Déterminer les limites de* f *en* $+\infty$ *et* $-\infty$.

Exercice 432 *Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur* $\mathbb{R}$ *:*

1. $f(x) = \begin{cases} x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -x.\cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x < 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} x^2+2 & si\ x \geq 1 \\ \sqrt{8+\cos\left(\frac{x-1}{3}\right)} & si\ x < 1 \end{cases}$

Maple>`plot(-x*cos(1/x),x=-2..0) ; plot(x*sin(1/x),x=0..2);`



Exercice 433 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}$

1. *Montrer que* f *se prolonge par continuité en* 0.
2. *Déterminer* $\lim\limits_{+\infty} f$.
3. *Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$ *et atteint sa borne supérieure.*

Exercice 434 *Soit la fonction partie fractionnaire* $u: \ x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ *et la fonction* f *définie par*

$$f(x) = u(x)(1-u(x))$$

1. *Montrer que f est continue sur [0,1[.*
   INDICATION: *on pourra calculer explicitement la fonction f sur cet intervalle.*
2. *Montrer que u est 1-périodique. Que peut-on en déduire pour f ?*
3. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe.*

Exercice 435 *Déterminer parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lesquelles sont continues en 0 :*

1. $x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $x \longmapsto \begin{cases} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 436 *Soit f définie pour tout $x \in [0,1]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ou si} x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } \ x = \frac{p}{q} \textit{ avec } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \textit{ et } p \wedge q = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Exercice 437 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est eunitnoc au point x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x - x_0| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \eta$$

1. *Montrer que les fonctions affines sont eunitnoc en tout point de $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que si f est eunitnoc en x_0, alors f est eunitnoc en tout point de $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que les fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ sont eunitnoc en 0.*
4. *Soit g définie par $g(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad x = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ \tan(x) & \textit{sinon} \end{cases}$. g est-elle eunitnoc en $\frac{\pi}{2}$?*

Exercice 438 *Déterminer les fonctions continues périodiques de période 1 et $\sqrt{2}$.*

19.2 Équations fonctionnelles

Exercice 439 *Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*

1. *Montrer que :*

   a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(nx) = nf(x)$ *b)* $f(0) = 0$ *et f impaire.*

2. *En déduire que :*

   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$ *b)* $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = nf(1)$ *c)* $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$

3. *Déterminer f.*

Exercice 440 *Soit f une fonction continue en 0 et telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

1. *Calculer $f(0)$. Étudier la parité de f.*
2. *Montrer que $f(nx) = n^2 f(x)$ pour tout entier n et tout réel x.*
3. *Montrer que $f(rx) = r^2 f(x)$ pour tout rationnel r et tout réel x.*
   INDICATION: *on pourra calculer de deux façons $q^2 f(\frac{p}{q}x))$.*
4. *Conclure.*

Exercice 441 *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :*

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$$

19.3 Fonctions continues : aspects globaux

Exercice 442 *Soient n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots \frac{1}{x-a_n}$. Montrer que f s'annule $n-1$ fois.*

Exercice 443 *Soit f une fonction définie sur $[0,1]$*

1. *Montrer que si f est continue et injective sur $[0,1]$, alors f est monotone.*
2. *Montrer que si f est monotone sur $[0,1]$ et que, pour tout $z \in [f(0), f(1)]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = z$, alors f est continue sur $[0,1]$. (Recommencer en remplaçant l'hypothèse monotone par injective).*

Exercice 444 1. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si B est dense dans A, $f(B)$ est dense dans $f(A)$.*

2. *En déduire que $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.*

Exercice 445 *(Universal Chord Theorem)*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définissons $g : [0, 1-\frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$.

1. *Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.*
2. *En déduire qu'il existe $\alpha_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ tel que $f(\alpha_n + \frac{1}{n}) = f(\alpha_n)$.*
3. *Montrer que l'énoncé suivant est faux :*

$$\forall t \in]0,1[, \qquad \exists x_t \in [0, 1-t], \qquad f(x_t + t) = f(x_t)$$

Indication: *pour t tel que $\frac{1}{t} \notin \mathbb{N}^*$, on pourra choisir $x \mapsto f(x) - x$ t-périodique.*

Exercice 446 *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que $f([0,1])$ est l'ensemble des points fixes de f et en déduire que l'ensemble des points fixes de f est un segment.*

Exercice 447 1. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que :*

$$\forall x \in [0,1], \qquad f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ f(x) + m \leq g(x)$

2. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que :*

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que : $\forall x \in [0,1],\ Cf(x) \leq g(x)$

Exercice 448 *Soit f une application décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.*

Exercice 449 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{\infty} f = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que f prend toute valeur strictement comprise entre $f(0)$ et l.*

Exercice 450 *Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que : $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |a - a_k| = \frac{1}{2}$.*

Indication: *on pourra introduire la fonction $x \mapsto \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|$*

19.4 Fonctions uniformément continues

Exercice 451 *Montrer que* $t \mapsto \sin(t^2)$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *(et donc qu'une fonction continue bornée n'est pas forcément uniformément continue).*

Exercice 452 *Soit* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *qui admet des limites finies en* $\pm\infty$*. Montrer que* f *est uniformément continue.*

Exercice 453 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uniformément continue telle que* $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$ *(*n *est un entier). Montrer que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$*.*

Exercice 454 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$*.*
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que :*

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon + \alpha(x - y)^2$$

Exercice 455 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Montrer que* f *est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites* (x_n) *et* (y_n) *telles que* $\lim (x_n - y_n) = 0$*, on a* $\lim (f(x_n) - f(y_n)) = 0$*.*

Exercice 456 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uniformément continue. Posons* $g(x) = \sup_{[x,x+1]} f$*. Montrer que* g *est continue.*

19.5 Fonctions lipschitziennes

Exercice 457 *Soit* I *un intervalle borné.*

1. *Montrer que pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}.$$

2. *En déduire que la fonction* $x \mapsto x^n$ *est lipschitzienne sur* I*, puis que les fonctions polynomiales sont lipschitziennes sur tout intervalle borné.*

Exercice 458 *Déterminer toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui vérifient pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Exercice 459 *Soit* f *et* g *deux fonctions continues sur un segment* I*.*

1. *Montrer que, pour tout réel* x*, on peut définir :*

$$\varphi(x) = \sup_{t\in I} (f(t) + xg(t)).$$

2. *Montrer que* φ *est lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 460 *Soit* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ k*-lipschitzienne.*
Montrer qu'il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}$ *de* f *à* $\mathbb{R}$*, puis que ce prolongement est* k*-lipschitzien.*

MPSI$_2$ 20

Dérivabilité des fonctions réelles

20.1 Dérivabilité

Exercice 461 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{x-1}{x^2}) & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$
Étudier la continuité, la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f selon les valeurs de a.

```
MAPLE>simplify(diff(exp((x-1)/x^2),x));
```

$$-\frac{(x-2)e^{\left(\frac{x-1}{x^2}\right)}}{x^3}$$

Exercice 462 *Soit f la fonction définie par $f(t) = (1-t)\sqrt{1-t^2}$*

1. *Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.*
2. *Calculer, le cas échéant, sa dérivée.*

Exercice 463 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0.*
On suppose que f est continue et dérivable en 0 et que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

1. *Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a,a[$ sur lequel : $|f(x)| < \frac{1}{2}$.*
2. *Montrer que la fonction f est continue sur $]-a,a[$.*
3. *Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-a,a[$ et calculer sa dérivée.*
4. *En déduire l'expression de la fonction f.*
   Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 464 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$*

1. *Appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0,x]$ aux fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto t\cos(t) - \sin(t)$.*
2. *En déduire que f se prolonge de façon $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer f'.*

Exercice 465 *Soit* $f : \begin{cases} \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[& \to & \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & \frac{2x+1}{3x+1} \end{cases}$

1. *Montrer que f est strictement décroissante.*
2. *Montrer qu'elle réalise une bijection entre $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.*
   Soit f^{-1} sa réciproque.
3. *Calculer la dérivée de f^{-1}.*

Exercice 466 *Trouver les extrema des fonctions suivantes :*

1. $f : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ *sur* $[3, +\infty[$
2. $f : x \mapsto (x^2 - 3x)e^x$ *sur* $\mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto (x^2 - 3x)e^x$ *sur* $[1, 2]$
4. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{(3+x)^2}\right)$ *sur* $\mathcal{D}_f$

Exercice 467 *Montrer que pour tout* $x > 0$ *:*

1. $\sin x < x$
2. $\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2}$
3. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$

20.2 Dérivabilité à l'ordre n

Exercice 468 *Considérons la fonction* $f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right) & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *où* $a < b$

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$
2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$.
3. *On pose* $h : x \mapsto \exp\frac{1}{x-\alpha}$.
   Montrer que pour tout entier n*, il existe un polynôme* P_n *tel que :*
$$h^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$$
4. *En déduire la forme de* $f^{(n)}$ *et montrer, par récurrence, que* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *pour tout* n.

Exercice 469 *Soit* n *entier naturel fixé ; déterminer la classe de la fonction* f *définie par*
$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 470 *Soient* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* f *la fonction définie par* $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$.

1. *Calculer* $f^{(n)}(x)$.
2. *Trouver, à l'aide du cas* $a = b$*, l'expression de* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 471 *Pour tout entier* n*, on considère le polynôme* $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$.

1. *Calculer, pour tout* $k \in [\![0, n-1]\!]$*, les valeurs de* $((x^2-1)^n)^{(k)}$ *en* $x = \pm 1$.
2. *Montrer que* L_n *possède* n *zéros distincts appartenant à* $]-1, 1[$.
3. *Montrer que la famille* $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

20.3 Théorèmes généraux

Exercice 472 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ *et* $f'(b) > 0$. *Montrer qu'il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$ *et* $f'(c) \leq 0$.

Exercice 473 *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x^2}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$. *Montrer que* f *dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 1$ *et pourtant que* f *n'est croissante sur aucun voisinage de* 0.

Exercice 474 *Montrer que si* P *est scindé à racines simples, alors* P' *est aussi scindé à racines simples.*
En déduire que P *n'a pas deux coefficients consécutifs nuls.*

Exercice 475 *Soit* P *un polynôme à coefficients réels. Montrer que l'équation* $e^x = P(x)$ *admet au plus* $\deg P + 1$ *solutions.*

Exercice 476 *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de période 1 qui admet n zéros sur l'intervalle $[0,1[$. Montrer que f' admet au moins n zéros sur ce même intervalle.*

Exercice 477 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$.
Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(\xi)$$

Indication: *on pourra considérer $g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) - f\left(\frac{a+b}{2} + t\right)$.*

Exercice 478 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, $a_1 < \ldots < a_n$ des éléments de $[a,b]$. Le polynôme interpolateur P de f aux points $(a_i)_{i\leq n}$ est défini par*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \prod_{j\neq k} \frac{x-a_j}{a_k-a_j}$$

Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)...(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$
Indication: *on pourra commencer par introduire une fonction*

$$g(x) = f(x) - P(x) - A\frac{(x-a_1)...(x-a_n)}{n!}$$

avec A convenablement choisi.

Exercice 479 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose, de plus, que f' possède une limite finie en $+\infty$. Que peut-on dire de cette limite ?*

Exercice 480
1. *Montrer par récurrence, que la propriété suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ admettant $n+1$ zéros distincts, alors sa dérivée n-ème admet au moins un zéro.*
2. *Montrer que la dérivée n-ème de $f(x) = \sin\left(\pi + \prod_{k=0}^{n}(x-k)\right)$ admet au moins un zéro.*

Exercice 481 *Soit $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$ définie sur $[0,+\infty[$.*
1. *Montrer la convergence de la suite définie par u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Notons l la limite de (u_n).*
2. *Trouver un entier N tel que $|u_N - l| \leq 10^{-8}$.*

Exercice 482 *Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.*

20.4 Convexité

Exercice 483 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.*
1. *Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c)$*
2. *On suppose que $f'' \geq 0$ sur $]a,b[$.*
   a) *Montrer que $\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.*
   b) *En déduire que f est convexe sur $[a,b]$.*

Exercice 484
1. *Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.*
2. *Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0,+\infty[$ et qui ne soit pas constante.*

Exercice 485 *1. Étant donné une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.*

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives. Montrer que si $\ln f$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice 486 *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si la fonction $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est convexe.*

MPSI$_2$ 21

Formules de Taylor et développements limités

21.1 Formules de Taylor

Exercice 487 *1. Écrire la formule de Taylor en* 0 *à l'ordre* 2 *pour la fonction* sin*. En déduire :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$$

2. Soit $P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$*. Montrer que pour* $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ *:*

$$P(x) \leq \sin x \leq P(x) + \frac{x^9}{9!}$$

3. Trouver un réel $\alpha > 0$ *tel que* $|\sin x - P(x)| \leq 10^{-10}$ *pour tout* $x \in [0, \alpha]$*.*

4. Notons, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$*,* P_k *le polynôme de Taylor de la fonction* sin *en* 0 *à l'ordre* k*. Trouver un entier* k *tel que*

$$\forall x \in [0, 1], \qquad |\sin x - P_k(x)| \leq 10^{-20}$$

Exercice 488 *1. Soit* $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$*. Montrer que* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*.*
Indication: *on pourra montrer que* $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ *avec* P_n *un polynôme.*

2. Donner le développement de Taylor en 0 *de la fonction* f*.*

3. En déduire qu'il existe des fonctions différentes avec le même développement de Taylor en un point mais ne coïncidant sur aucun intervalle non réduit à un point.

Exercice 489 *Montrer qu'il n'existe pas de polynôme* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *non-constant tel que* $P(n)$ *soit un nombre premier pour tout entier* n*.*
Indication: *on pourra considérer* $P(n + P(n))$ *et utiliser une formule de Taylor.*

Exercice 490 *Soit* $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que* $f(x) \underset{\pm\infty}{=} o(x^{p-1})$*.*
Montrer que $f^{(p)}$ *s'annule.*
Indication: *on pourra utiliser une formule de Taylor à l'ordre* p*.*

21.2 Calculs de DL

Exercice 491 *Calculer le DL en 0 des expressions suivantes :*

(à l'ordre 4) $e^{\cos x}$

(à l'ordre 2) $\arccos\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$

(à l'ordre 7) $\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

(à l'ordre 6) $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

(à l'ordre 3) $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

(à l'ordre 5) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$

(à l'ordre 3) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\mathrm{sh} x}$

MAPLE>`series(log(1/(cos(x))), x=0,7);`

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + O(x^8)$$

Exercice 492 *Calculer le DL :*

(à l'ordre 3 en 2) $x^4 - x^2 + 1$ *(à l'ordre 3 en 1)* $\frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ *(à l'ordre 3 en 1)* $\log(1+\frac{1}{x})$

(à l'ordre 3 en 1) $\cos(\ln x)$ *(à l'ordre 3 en 1)* $\tan\frac{\pi x}{4}$ *(à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{4}$)* $\ln(\tan x)$

Exercice 493 *Calculer le terme d'ordre 2008 du DL en 1 de $x \mapsto \ln(1+\frac{1}{x})$.*
RÉSULTAT: $\frac{1}{2008!}\left(2^{-2008}-1\right)$.

Exercice 494 *Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par* $f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{|x|} & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ \mathrm{ch}\sqrt{x} & si\ x > 0 \end{cases}$.
À quels ordres f admet-elle un DL en 0 ?

Exercice 495 *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin x$.*

1. *Montrer que f est bijective et de réciproque de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
2. *Calculer un DL à l'ordre 3 en 0 de f^{-1}.*

Exercice 496 *Déterminer la classe de la fonction* $x \mapsto \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}\ si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$.
Admet-t-elle un développement limité d'ordre 3 en 0 ?

Exercice 497 *Déterminer les ordres pour lesquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :*

1. $x \mapsto \sqrt{x}$
2. $x \mapsto x^{\frac{13}{3}}$
3. $x \mapsto |x|^n$

21.3 Calculs de limites

Exercice 498 *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + \mathrm{ch} x - 2}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Exercice 499 *Calculer les limites des expressions suivantes lorsqu'elles existent :*

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1-x} - \frac{\sin x}{1-\sin x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x-1)}$

MAPLE>`limit((tan(x))^(tan(2*x)), x=Pi/4);`

$$e^{(-1)}$$

Exercice 500 *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels* $a_1, \dots, a_n$ *pour que la fonction* f *définie par* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\tan(kx)}$ *admettent une limite finie en* 0.

Exercice 501 *Soit* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *telle que* $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ *et* $f''(0) = -1$. *Montrer que*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x = e^{-\frac{a^2}{2}}$$

21.4 Applications, études asymptotiques

Exercice 502 *Montrez que, pour toutn entier non nul, l'équation* $e^x = n - x$ *admet une unique solution positive que l'on notera* x_n.
Déterminer trois termes du développement asymptotique de x_n.

Exercice 503 *1. Étudier l'allure locale en* $t = 0$ *des courbes paramétrées suivantes :*

$$t \mapsto (t^2 + \cos t, t^2 + \sin t) \qquad t \mapsto (2t^3 - \mathrm{tsh}t, t^3 + \cos t) \qquad .$$

2. Étudier les courbes paramétrées suivantes :

$$t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}, \frac{t^2}{t-1}\right) \qquad t \mapsto \left(\cos t, \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t}\right).$$

Exercice 504 *1. Établir une relation entre les expressions* $\arcsin \sqrt{x}$ *et* $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
2. En déduire le développement asymptotique de $\arcsin x$ *en* -1 *avec la précision* x^2.

Exercice 505 *Calculer les développements asymptotiques en* $+\infty$ *:*
1. $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ *à l'ordre 2*
2. $\ln \sqrt{1+x}$ *à l'ordre 2*

```
MAPLE>series(ln(sqrt(1+x)),x=infinity,3);
```

$$\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + O(\frac{1}{x^3})$$

Exercice 506 *Déterminer l'asymptote en* $+\infty$ *et étudier la position relative pour chacune des courbes données par les équations suivantes :*

1. $y = \sqrt{x(x+1)}$
2. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
3. $y = (x+1)\arctan(1 + 2/x)$
4. $y = x.\arctan x.e^{1/x}$

MPSI$_2$ 22

Intégration sur un segment

22.1 Sommes de Riemann

Exercice 507 *Montrer que :*

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=n+1}^{kn} \frac{1}{j} = \ln k$ *pour* $k \geq 2$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)} = \frac{\pi}{8}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=2}^{n} A_1A_k = \dfrac{4}{\pi}$ *avec* $A_1A_2\dots A_n$ *un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.*

Exercice 508 1. *Montrer que, pour tout réel* $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. *Soit* $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^+$ *continue. Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})\right) = \exp \int\limits_0^1 f(t)dt$$

Exercice 509 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-4} \prod\limits_{k=1}^{2n} \left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 510 1. *Déterminer la limite de la suite* $\left(u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}\right)_n$.

2. *Considérons la suite* $\left(v_n = \sum\limits_{k=1}^{n^2} \frac{k}{k^2+n^2}\right)_n$. *Montrer que* $u_n - v_n \sim \ln n$.

Exercice 511 *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$. *Déterminer la limite des expressions suivantes :*

1. $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$
2. $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{1\leq k<l\leq n} f(\frac{k}{n})f(\frac{l}{n})$
3. $\frac{1}{n^2} \sum\limits_{1\leq k\leq l\leq n} f(\frac{k}{n})f(\frac{l}{n})$

Exercice 512 *(Inégalité de Jensen)*
Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et convexe.*
Montrer que $g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(t))dt$.

22.2 Calculs

Exercice 513 *Calculer les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles où elles sont définies :*

1. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2+x^4}$
2. $x \mapsto \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$
3. $x \mapsto \frac{1-x^2}{(1+x^2)(x+2)^2}$

Exercice 514 *Calculer, pour tout* $a > 0$, $I_a = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

Exercice 515 *Calculer* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos(x)\cos(\theta)}$ *avec* $-\pi < \theta < \pi$.

Exercice 516 *Calculer* $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan(x)dx$.

Exercice 517 *Calculer par changement de variables les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^1 \frac{1+\tan(x)^3+\tan(x)^5}{\cos(x)^2}\ dx$ *avec* $u = \tan(x)$
2. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin(2x)^2}$ *avec* $t = \tan(2x)$

Exercice 518 *Définissons* $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin(x)\cos(x)}{\tan^2 x+\mathrm{cotan}^2 x}dx$

1. *A l'aide du changement de variable* $y = \frac{\pi}{2} - x$, *montrer que* $I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)dx}{\tan^2 x+\mathrm{cotan}^2 x}$.
2. *En déduire la valeur de* I.

Exercice 519 *On pose* $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}}dx$ *et* $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)}}dx$.

1. *Calculer* $I + J$
2. *Montrer que* $I = J$ *et en déduire la valeur de* I.
   INDICATION: *on pourra utiliser le changement de variable* $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Exercice 520 *Calculer* $I = \int_0^{\pi} \dfrac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt$ *à l'aide d'un changement de variable affine.*

Exercice 521 *Soit* $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ *qui échange les deux premières décimales (i.e.* $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$*).*
Montrer que f *est continue par morceaux et calculer* $\int_0^1 f(t)dt$.

22.3 Suites définies par une intégrale

Exercice 522 *Définissons, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{t}\right)\right]^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

1. *Montrer que :*
$$I_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos(v))^n dv$$
2. *Calculer* I_0, I_1 *et* I_2.
3. *Pour tout* $n \geq 2$, *trouver une relation entre* I_n *et* I_{n-2}.

Exercice 523 *(Intégrales de Wallis) Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$

1. *Comparer* I_n *et* $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

2. *Montrer que I_n tend vers 0.*
3. *Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.*
   En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
4. *Montrer que $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.*
5. *Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n puis de $\binom{2n}{n}$.*

Exercice 524 *(Lemme de Lebesgue) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\int_a^b f(t)\cos(nt)dt \to 0$.*
INDICATION: *on pourra commencer par traiter des cas particuliers (f de classe $\mathcal{C}^1$ ou f en escalier).*

Exercice 525 *Soit $f[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue non identiquement nulle, telle que :*

$$\forall\ k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \int_a^b t^k f(t)dt = 0$$

Démontrer, par récurrence, que f change au moins n fois de signe sur $]a,b[$.
INDICATION: *on pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice 526 *Soient a,b deux entiers naturels non-nuls. Définissons le polynôme $P(X) = \frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n$.*

1. *Vérifier que $P(\frac{a}{b} - X) = P(X)$.*
2. *Montrer que les valeurs des dérivées de P en 0 (et donc en $\frac{a}{b}$ d'après la question précédente) sont des entiers.*
3. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi P(t)\sin t dt = 0$.*
4. *Supposons que $\pi = \frac{a}{b}$. Montrer que $\int_0^\pi P(t)\sin t dt \in \mathbb{Z}$.*
5. *Que conclure ?*

22.4 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 527 *Soient a et b deux réels positifs. Considérons f une fonction continue et strictement monotone de $[0,a]$ dans $[0,b]$ (avec $f(0) = 0$ et $f(a) = b$).*

1. *Montrer que $ab = \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b f^{-1}(y)dy$.*
   INDICATION: *on pourra commencer par supposer f dérivable.*
2. *Montrer que : $\forall u \in [0,a], \quad \forall v \in [0,b], \qquad uv \leq \int\limits_0^u f(x)dx + \int\limits_0^v f^{-1}(y)dy$*

Exercice 528 1. *Soit $f : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathcal{C}^2$.*
   Montrer que $I = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t dt \geq 0$.
   Vérifier que le résultat reste vrai pour f convexe et seulement de classe $\mathcal{C}^1$.
2. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe et $g(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Montrer que g est convexe.*

Exercice 529 *Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue et $g(x) = \int_a^x \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$. Montrer que g est n fois dérivable et que $g^{(n)} = f$.*

22.5 *Varia*

Exercice 530 *Soient f, g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que f soit positive.*

1. *Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt$.*
2. *Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.*
3. *Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$*

Exercice 531 *Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)g(x) \geq 4$$

Montrer que :

$$\left(\int_{-1}^{2} f(x)dx\right)\left(\int_{-1}^{2} g(x)dx\right) \geq 36$$

Exercice 532 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $E_a = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) = a\}$. Déterminer $\min\limits_{f\in E}\int_0^1 (f''(t))^2 dt$.*

Exercice 533 *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Posons $a = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ et $b = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.*
Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq -ab$.

MPSI$_2$ 23

Intégration sur un intervalle quelconque

23.1 Intégrabilité et calculs d'intégrales

Exercice 534 *Déterminer si les intégrandes suivantes sont intégrables :*

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha} dt$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)}{(t^2-1)^\alpha} dt$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$
5. $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$
6. $\int_0^{+\infty} \ln \frac{1+t^2}{1+t^3} dt$

Exercice 535 *Prouver l'intégrabilité et calculer les intégrales suivantes :*

1. $\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt = \frac{\pi}{2}$
2. $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \pi$
3. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}} dt = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$
4. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
5. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2+\sin t+\cos t} = \pi\sqrt{2}$
6. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{1+t^4} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{4}$
8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \pi$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+a^2)} dt = \frac{\pi}{1+|a|}$ *avec* $a^2 \neq 1$
11. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt = 4\ln 2 - 4$ *(*$u = \sqrt{1-t}$*)*
12. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$ *(*$u = 1/t$*)*
13. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right) dt = a\pi$ *avec* $a > 0$

```
MAPLE>assume(a>0) :int(ln(1+a^ 2/t^ 2),t=0..infinity);

a~π
```

Exercice 536 *Discuter, en fonction de* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$*, l'intégrabilité sur* $\mathbb{R}^+$ *de* $t \mapsto \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta}$.

Exercice 537 *Définissons* $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ *et* $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)} du$.

1. *Montrer que ces intégrales sont bien définies.*

2. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = J_n$ puis calculer cette valeur commune.*

Exercice 538 1. *Montrer que les intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$ sont bien définies.*

2. *Montrer que $I = J$*
3. *Calculer la valeur de $I + J$ à l'aide du changement de variables $x = t - \frac{1}{t}$.*
4. *En déduire I.*

```
MAPLE>int(1/(1+t^4),t=0..infinity);
```

$$\frac{1}{4}\pi\sqrt{2}$$

Exercice 539 *Calculer, pour $a > 0$, $I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}(\sin x)^n dx$.*

23.2 Propriétés déduites de l'intégrabilité

Exercice 540 *Considérons la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.*

1. *Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*
2. *Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.*
   RÉSULTAT: e^{-x}/x.
3. *Donner un équivalent de $f(x)$ en 0^+.*

Exercice 541 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :*

$$\exists\ \alpha > 0, \quad \forall\ x \geq 0, \qquad f'(x) \geq \alpha$$

Montrer que $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ diverge en $+\infty$.

Exercice 542 *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ continue et croissante. Posons $S_n = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$.*

1. *Montrer que si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(t)dt$.*
2. *Montrer que si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.*
3. *Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$.*

Exercice 543 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\int_0^x f(t)dt$ converge.*

1. *Montrer que la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.*
2. *Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent en $+\infty$ de $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.*

Exercice 544 1. *Déterminer la limite*

$$\lim_{x\to0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos t\ \ln(1+t^2)}{\sin^2 t\,\mathrm{sh} t} dt$$

2. *Pour $0 < a < b$, montrer que*

$$\lim_{x\to0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1-\cos u}{u^3} du = \frac{1}{2}\ln(b/a)$$

MPSI$_2$ 24

Éléments de topologie

24.1 Normes

Exercice 545 *Montrer que* $(x,y) \mapsto \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ *définit une norme sur* $\mathbb{R}^2$ *; dessiner la boule de centre* $(0,0)$ *et de rayon* 1.

Exercice 546 *Posons, pour tout polynôme* $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ *:*

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad \|P\|_\infty = \max\{|a_0|,\dots,|a_n|\}, \qquad \|P\| = \max\{|P(t)|,\ -1 \le t \le 1\}$$

Vérifier que ces trois expressions définissent des normes. Sont-elles équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ *? sur* $\mathbb{R}[X]$ *?*

INDICATION: *on pourra par exemple introduire le polynôme* $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k X^k$.

Exercice 547 *Montrer que l'application sur* $\mathbb{R}[X]$ *définie par* $P \mapsto \|P\| = \sup(|P(t) - P'(t)|,\ t \in [0,1])$ *est une norme.*

Exercice 548 *Soit* E *l'ensemble des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lipschitziennes. Posons, pour* $f \in E$ *:*

$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|, x \neq y\right), \qquad N(f) = |f(0)| + \sup\left(\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|, x \neq 0\right).$$

1. *Montrer que* E *est un espace vectoriel.*
2. *Montrer que* $\|.\|$ *et* N *sont des normes sur* E.

Exercice 549 *Soient* $(E, \|\ \|)$ *un* $\mathbb{R}$*-evn et* $K \subset E$ *une partie convexe, bornée, symétrique par rapport à l'origine et telle que* 0_E *soit intérieur à* K.
Pour $x \in E$, *posons* $N(x) = \inf\{|\lambda|, \frac{1}{\lambda}x \in K\}$. *Montrer que* N *est une norme équivalente à* $\|\ \|$.

24.2 Topologie

Exercice 550 *Que dire des parties suivantes de* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{C}$*) ?*

1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, xy=1\}$
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+xy+y^2<1\}$
3. $\{z\in\mathbb{C}^*, \left|\frac{1+z}{z}\right|\leq\frac{1}{2}\}$
4. $\{z\in\mathbb{C}, \Re(z^2)\leq 1\}$

Exercice 551 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.*
Montrer que la partie $\{u_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ est fermée si et seulement si $(u_n)_n$ converge.

Exercice 552 *Soient A et B deux ouverts d'un evn. Montrer que $\{a+b,\ a\in A, b\in B\}$ est un ouvert.*
A-t-on un résultat analogue avec des fermés ?

Exercice 553 *Soient A, B deux parties disjointes d'un espace vectoriel normé telles que$A$ est ouvert.*
Montrer que A et $\overline{B}$ sont disjointes.

Exercice 554 *Soit O un ouvert non vide d'un evn E. Montrer que* $\mathrm{Vect}(O)=E$.

Exercice 555 *Soit F un sev d'un evn E.*
1. *Montrer que $\overline{F}$ est un sev de E.*
2. *Montrer que si F différent de E, alors F est d'intérieur vide.*
3. *Montrer que, si E est de dimension finie, alors $F=\overline{F}$.*

24.3 Continuité

Exercice 556 *Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.*
Posons, pour tout $x\in E$, $d(x,A)=\inf\{d(x,a),\ a\in A\}$.
1. *Montrer que :*
$$\forall\ x,y\in E,\ |d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$$
2. *En déduire que l'application $x\mapsto d(x,A)$ est continue.*

Exercice 557 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F.*
Montrer que f est continue si et seulement si : $\forall\ A\subset E,\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

Exercice 558 *Considérons l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{x}{\max(1,\|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.*

Exercice 559 *Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, posons $N_1(P)=\sup\{|P(t)|, 0\leq t\leq 1\}$ et*
$N_2(P)=\sup\{|P(t)|, 1\leq t\leq 2\}$. Considérons l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par
$\varphi(P)=P(0)$.
1. *Vérifier que N_1 et N_2 sont des normes.*
2. *Montrer que φ est continue pour N_1.*
3. *En introduisant les polynômes $(1-\frac{X}{2})^n$, montrer que φ n'est pas continue pour N_2.*
4. *En déduire que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.*

Exercice 560 *Montrer que l'ensemble des projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie est une partie fermée.*

MPSI$_2$ 25

Fonctions de plusieurs variables

25.1 Limites, continuité

Exercice 561 *Déterminer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en* $(0,0)$ *:*

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x$
6. $f(x,y) = x^y$

Exercice 562 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+y^2-1 & si\ x^2+y^2>1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & si\ x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$$

Montrer que f *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 563 *Soient* C *une partie convexe de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : C \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que* $f(C)$ *est un intervalle.*

25.2 Dérivabilité, différentiabilité

Exercice 564 *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \int_0^x \ln(t^2+1)\ dt$.

1. *Déterminer* f *par intégration par partie. En déduire* $f(1)$, $f(-1)$.
2. *Soit* $g(x,y) = f(x+y) - f(x-y) = \int_{x-y}^{x+y} \ln(t^2+1)\ dt$
   a) *Quel est le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité de* g *?*
   b) *Calculer* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial g}{\partial y}$.
   c) *Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de* g *au point* $(0,1)$.

Exercice 565 *Soit* f *la fonction de deux variables définie par*

$$f(x,y) = \int_x^y \arctan u\ du$$

1. *Soit* $h(x) = f(1,x)$. *Déterminer, grâce à une intégration par parties, la fonction* h.
2. a) *Déterminer le domaine de définition de* f. f *est-elle continue sur celui-ci ?*
   b) *Calculer les dérivées partielles de* f.

c) *Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(1, \sqrt{3})$.*

3. *Soit $g(x) = f(x, \sqrt{3}x)$.*

   a) *Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer g'.*

   b) *Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point 1.*

Exercice 566 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

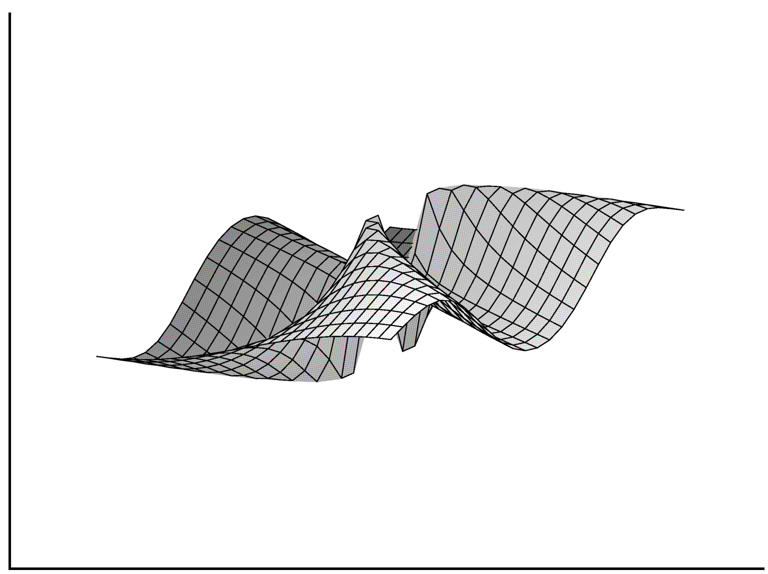
1. *f est-elle continue en $(0,0)$?*
2. *f admet-elle des dérivées partielles au point $(0,0)$?*
3. *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 567 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en 0.

MAPLE>`plot3d(x^2*y/(x^4+y^2),x=-2..2,y=-2..2);`



Exercice 568 *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto xy^2 \end{cases}$.

1. *Déterminer la dérivée de f au point $(-1,3)$ selon le vecteur $(2,-3)$.*
2. *Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en $(-1,3)$.*

Exercice 569 *Chercher les extrema des fonctions suivantes :*

1. $(x,y) \mapsto e^{x \sin y}$.
2. $(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$.
3. $(x,y) \mapsto (y-x)^3 + 6xy$ *sur* $\{(x,y) \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$.
4. $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2+2xyz$ *sur* $\mathbb{R}^3$.
5. $(x,y) \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x+y)$.
6. $(x,y) \mapsto \frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 570 *Considérons deux cercles C_1 et C_2 tangent extérieurement en un point noté O. Déterminer le maximum de l'aire du triangle ABO lorsque A décrit C_1 et B décrit C_2.*

Exercice 571 *Soit $f(x,y) = (x-y^2)(x-2y^2)$. Montrer que la restriction de f à chaque droite passant par $(0,0)$ y présente un minimum. Est-ce un minimum local de f ?*

Exercice 572 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles (en fonction de celles de f) des fonctions suivantes :*

1. $g_1(x,y) = f(y,x)$
2. $g_2(x) = f(x,x)$
3. $g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$
4. $g_4(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 573 *Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que, pour qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -x(y^2+1)h(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2yh(x) \qquad (\star)$$
il faut que h vérifie l'équation différentielle (E) $xh'(x) + 3h(x) = 0$.
2. *Déterminer les solutions de (E), puis trouver f de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant $(\star)$.*

Exercice 574 *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Notons r et u les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ respectivement définies par :*
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad u(x,y) = (F \circ r)(x,y)$$
Introduisons le Laplacien de u défini par : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1. *Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de r.*
2. *Montrer que : $\Delta u = F''(r) + \frac{F'(r)}{r}$.*
3. *En déduire Δu pour $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.*

Exercice 575 *Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes (avec $a \in \mathbb{R}$) :*

1. $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x}{y} + a$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy$
4. $\frac{\partial f}{\partial x} = af$

```
MAPLE>with(PDEtools) : pdsolve(diff(f(x,y),x$2)=x*y);
```
$$\frac{1}{6}x^3y + \_F1(y)x + \_F2(y)$$

Exercice 576 *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ léquation $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{2y}{x}\frac{\partial F}{\partial y} = -F$.*
INDICATION: *on pourra poser $x = u$ et $y = u^2v$.*

25.3 Champs de vecteur

Exercice 577 *Déterminer si les champs de vecteurs suivants dérivent d'un potentiel scalaire et déterminer (le cas échéant) les primitives associées :*

1. $\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}, \frac{x^2}{(x+y)^2}\right)$
2. $\left(\frac{2+x}{y}, \frac{2+y}{x}\right)$
3. $\left(2x + \frac{1}{y}, 2y - \frac{x}{y^2}\right)$

Exercice 578
1. *Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que le champ de vecteurs $f(y).(xe^y, y)$ dérive d'un potentiel scalaire (que l'on déterminera).*
2. *Trouver les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que le champ de vecteurs $(2xz, f(y)g(z), x^2 + \frac{y^2}{2})$ dérive d'un potentiel scalaire (que l'on déterminera).*

Exercice 579 *1. Déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *telles que*

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x,y) = \left(\frac{\ln x + y - 1}{x^2 y}, \frac{\ln x}{xy^2}\right)$$

2. En déduire la résolution de l'équation différentielle : $(x \ln x)y' + (\ln x + y - 1)y = 0$.

Exercice 580 *Considérons l'application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *qui à un point* M *associe le point* M' *défini par* $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{1+OM^2}\overrightarrow{OM}$. *Montrer que cette application dérive d'un potentiel scalaire et déterminer ses primitives.*

25.4 Intégrales multiples

Exercice 581 *Calculer* $\iint_D f(x,y)dxdy$ *dans les cas suivants :*

1. $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $f(x,y) = x^2 y$
2. $D = \{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$
3. $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = (x+y)^2$
4. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, $f(x,y) = x + y + 1$
5. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi\}$, $f(x,y) = (x+y)\sin x \sin y$
6. $D = \{|x| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^2$

Exercice 582 *Montrer que* $I = \iint_\Delta (x^2 + xy + y^2)dxdy = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{11}{6}$ *avec* $\Delta = \{(x,y), y \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.
Indication: *On pourra passer en polaire.*

Exercice 583 *Considérons* $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. *Justifier la convergence de cette intégrale.*
2. *Pour* $a > 0$ *on note* $\Delta_a = [0,a] \times [0,a]$ *et* Q_a *le quart de disque d'équations :* $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
   a) *Encadrer l'intégrale sur* Δ_a *de* $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ *par les intégrales de* f *sur des domaines du type* Q_b.
   b) *Calculer* $\iint_{Q_b} f(x,y)dxdy$ *et en déduire la valeur de* I.

Exercice 584 *Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation polaire :*

1. $\rho = 1 + \cos\theta$.
2. $\rho = 2\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}$.

Exercice 585 *Calculer l'aire des domaines suivants :*

1. D *est la partie du disque unité située dans la concavité de l'hyperbole d'équation* $xy = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
   Résultat: $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$.
2. D *est l'intersection des domaines limités par les ellipses d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *et* $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
   Résultat: $4ab \arctan \frac{b}{a}$.

Exercice 586 *Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Exercice 587 *Montrer que l'aire délimitée par la courbe d'équation* $(y-x)^2 = a^2 - x^2$ *vaut* $\pi.a^2$.

Annexe

MPSI$_2$ **A**

Développements limités usuels en 0

	$DL_n(0)$	$DL_5(0)$
exp	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
sin	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
cos	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
sh	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
ch	$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$	
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$
$x \mapsto \ln(1-x)$	$-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k + o(x^n)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
$x \mapsto \ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
$x \mapsto \arctan(x)$	$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$
$x \mapsto \arcsin(x)$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(2k+1)(2^k.k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3.x^5}{40} + o(x^5)$

$\mathbb{MPSI}_2$ **B**

Formulaire (succinct) de trigonométrie

Trigonométrie circulaire	**Trigonométrie hyperbolique**

Relation fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$	$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$
On reconnaît le *cercle* de centre 0 et de rayon 1 qui admet le paramétrage $x \mapsto (\cos x, \sin x)$	On reconnaît une *branche d'hyperbole* (équilatère) de paramètrage $x \mapsto (\mathrm{ch} x, \mathrm{sh} x)$

Formules d'addition

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$	$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$	$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$$

Formules de linéarisation

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$	$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x) - 1)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$	$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{ch}(2x))$$

Un bon exercice consiste à retrouver l'ensemble des formules à partir de celles qui sont proposées ici et des propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques. Par exemple :

Exercice 588 *Montrer que pour tout couple de réels (p, q), on a :*

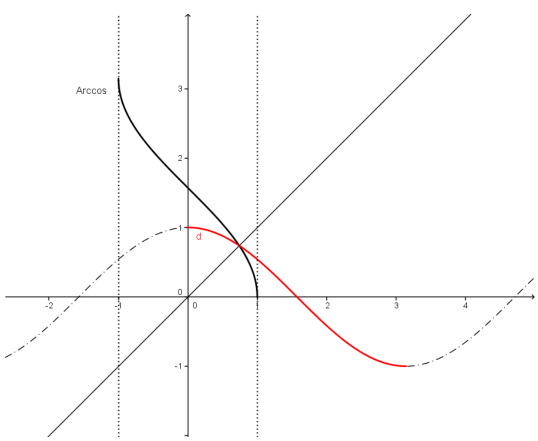
$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

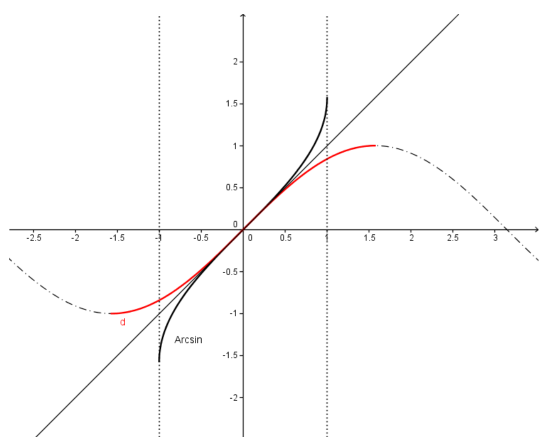
On remarquera que ces formules peuvent se mémoriser comme les formules d'addition à l'aide de la rengaine :

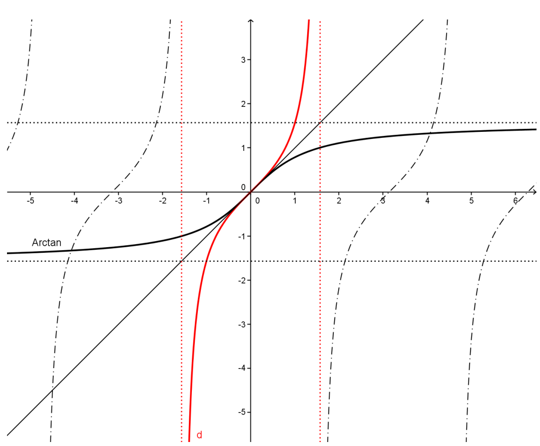
```
Si coco scie,
Coco Ici scie.
```

Pour les calculs d'intégrales, on a souvent besoin des expressions suivantes des fonctions trigonométriques à l'aide de $t = \tan\frac{\theta}{2}$:

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$$







MPSI$_2$ C

Alphabet grec

Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	$\mathit{\Gamma}$
delta	δ	$\mathit{\Delta}$
epsilon	ϵ, ε	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ, ϑ	$\mathit{\Theta}$
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	$\mathit{\Lambda}$
mu	μ	
nu	ν	
xi	ξ	
omicron	o	
pi	π	$\mathit{\Pi}$
rho	ρ, ϱ	
sigma	σ	$\mathit{\Sigma}$
tau	τ	
upsilon	υ	
phi	ϕ, φ	$\mathit{\Phi}$
psi	ψ	$\mathit{\Psi}$
chi	χ	
omega	ω	$\mathit{\Omega}$