Exercice 1 *Vrai ou faux*

Les nombres considérés étant complexes, est-il vrai que :

1. $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$
2. $\mathbf{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Re}(z_k)$
3. Avec $z = a + ib$, on a $|z| = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$ si $z \neq 0$
5. $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2}$ si $z \neq 0$
6. Si $z_2 \neq 0$, on a $\mathbf{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\mathbf{Re}(z_1)}{\mathbf{Re}(z_2)}$

Solution :

1. $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

   Vrai car $\overline{z} = \dfrac{1}{z} \iff z \times \overline{z} = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1$ car le module est toujours positif.
2. $\mathbf{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Re}(z_k)$

   Vrai cette propriété est vraie pour deux complexes, et se généralise à n par une récurrence immédiate.
3. Avec $z = a + ib$, on a $|z| = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$

   Vrai $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$ si $z \neq 0$

   Faux $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$; la formule proposée est fausse si $z = 2$ par exemple.
5. $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

   Vrai Il suffit de multiplier par $\overline{z}$ le numérateur et le dénominateur de la fraction $\dfrac{\overline{z}}{z}$ pour trouver l'égalité proposée : $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{\overline{z}^2}{|z|^2}$
6. Si $z_2 \neq 0$, on a $\mathbf{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\mathbf{Re}(z_1)}{\mathbf{Re}(z_2)}$

   Faux D'ailleurs, la formule n'a pas de sens si $z_1 = 1$ et $z_2 = i$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2 + 3z - 4 = 0$
2. $z^2 + 3z + 4 = 0$
3. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$
4. $3z^2 + 3z - 4 = 0$
5. $5z^2 + 3z + 4 = 0$
6. $3z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

Solution :

1. $z^2 + 3z - 4 = 0$

   solution : $\Delta = 25$ et les racines sont $z_1 = 1$ et $z_2 = -4$. autre méthode : trouver $z_1 = 1$ comme racine évidente, et trouver l'autre par la relation $z_1 \times z_2 = \dfrac{-4}{1}$
2. $z^2 + 3z + 4 = 0$

   solution : $\Delta = -7$ et les racines sont $z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$
3. $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

   solution : se servir de la question 1, on a $z^2 = 1$ ou $z^2 = -4$. Donc $z = 1$ ou $z = -1$ ou $z = 2i$ ou $z = -2i$.
4. $3z^2 + 3z - 4 = 0$

   solution : $\Delta = 57$ et les racines sont $z_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{57}}{6}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{57}}{6}$
5. $5z^2 + 3z + 4 = 0$

   solution : $\Delta = -71$ et les racines sont $z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{71}}{10}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{71}}{10}$

6. $3z^4 + 3z^2 - 4 = 0$

solution : se servir de la question 4, on a $z^2 = \dfrac{-3+\sqrt{57}}{6}$ positif, ou $z^2 = \dfrac{-3-\sqrt{57}}{6}$ négatif.

Donc $z = \sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{57}}{6}}$ ou $z = -\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{57}}{6}}$ ou $z = i\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{57}}{6}}$ ou $z = -i\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{57}}{6}}$.

Exercice 3

Après avoir cherché une racine évidente, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $5z^3 + 3z^2 - 8 = 0$
2. $5z^5 + 15z^4 + 3z^3 + 9z^2 - 4z - 12 = 0$

Solution :

1. $z = 1$ est une racine évidente, et on a la factorisation : $5z^3 + 3z^2 - 8 = (z-1)(5z^2 + 8z + 8)$.
   Donc $5z^3 + 3z^2 - 8 = 0$ ssi $z = 1$ ou $5z^2 + 8z + 8 = 0$.
   On trouve $z = 1$ ou $z = \dfrac{-4+2i\sqrt{6}}{5}$ ou $z = \dfrac{-4-2i\sqrt{6}}{5}$
2. $z = -3$ est une racine "évidente", et on a la factorisation :
   $5z^5 + 15z^4 + 3z^3 + 9z^2 - 4z - 12 = (z+3)(5z^4 + 3z^2 - 4)$.
   On a finalement 5 solutions possibles : $z = -3$ ou $z = -\dfrac{1}{10}\sqrt{-30+10\sqrt{89}}$ ou $z = \dfrac{1}{10}\sqrt{-30+10\sqrt{89}}$ ou $z = -\dfrac{1}{10}i\sqrt{30+10\sqrt{89}}$ ou $z = \dfrac{1}{10}i\sqrt{30+10\sqrt{89}}$

Exercice 4

Si $n \geq 2$ est fixé, on définit pour $k \in \mathbb{Z}$ $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Résoudre l'équation $\omega_k = \omega_\ell$ d'inconnue k et ℓ.
2. En déduire que $\{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$.
3. Quelle est la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$?

Solution :

1. $\omega_k = \omega_\ell \iff e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2i\ell\pi}{n}} \iff \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\ell\pi}{n}\ [2\pi] \iff \dfrac{k}{n} = \dfrac{\ell}{n}\ [1] \iff k = \ell\ [n]$
2. Par conséquent $\omega_k = \omega_{k+n} = \omega_{k+2n} \ldots$ et on a donc
   $\{\omega_k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$
   Tout en remarquant que les complexes de $\{\omega_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ sont 2 à 2 distincts car $\arg(\omega_k) = \arg\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \dfrac{2k\pi}{n} \in [0; 2\pi[$, sont 2 à 2 distincts dans $[0; 2\pi[$.
3. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$ car $n \geq 2$.
   Donc $S = 1 \times \dfrac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0$; car $\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n = e^{2i\pi} = 1$.

Exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, $n \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que l'on peut factoriser par l'angle moitié :
   $$e^{inx} + 1 = e^{in\frac{x}{2}}\left(e^{in\frac{x}{2}} + e^{-in\frac{x}{2}}\right) = e^{in\frac{x}{2}}\left(2\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\right)$$
   donner le module et un argument du nombre complexe $Z = e^{inx} + 1$. Faire de même avec $Z_2 = e^{inx} - 1$.
2. En vous inspirant de ce qui précède, quelle est le module et un argument de $Z = \dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$?

Solution :

1.
$$e^{inx}+1=e^{in\frac{x}{2}}\left(e^{in\frac{x}{2}}+e^{-in\frac{x}{2}}\right)=e^{in\frac{x}{2}}\left(2\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\right)$$

On a donc trois cas :

- Si on a $\cos\left(n\frac{x}{2}\right)>0$ alors $\left|e^{inx}+1\right|=2\cos\left(n\frac{x}{2}\right)$ et $\arg\left(e^{inx}+1\right)=n\frac{x}{2}\ [2\pi]$.
- Si on a $\cos\left(n\frac{x}{2}\right)<0$ alors $\left|e^{inx}+1\right|=2\left|\cos\left(n\frac{x}{2}\right)\right|$ et $\arg\left(e^{inx}+1\right)=\pi+n\frac{x}{2}\ [2\pi]$.
- Si on a $\cos\left(n\frac{x}{2}\right)=0$ alors $e^{inx}+1=0$; son module est nul et il n'a pas d'argument.

On fait de même pour le complexe $e^{inx}-1$

$$e^{inx}-1=e^{in\frac{x}{2}}\left(e^{in\frac{x}{2}}-e^{-in\frac{x}{2}}\right)=e^{in\frac{x}{2}}\left(2i\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\right)=e^{i\left(n\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\left(2\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\right)$$

On a donc trois cas :

- Si on a $\sin\left(n\frac{x}{2}\right)>0$ alors $\left|e^{inx}-1\right|=2\sin\left(n\frac{x}{2}\right)$ et $\arg\left(e^{inx}-1\right)=n\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- Si on a $\sin\left(n\frac{x}{2}\right)<0$ alors $\left|e^{inx}-1\right|=2\left|\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\right|$ et $\arg\left(e^{inx}+1\right)=\pi+n\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
- Si on a $\sin\left(n\frac{x}{2}\right)=0$ alors $e^{inx}+1=0$; son module est nul et il n'a pas d'argument.

2. $Z=\dfrac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}=\dfrac{e^{in\frac{x}{2}}\left(e^{in\frac{x}{2}}-e^{-in\frac{x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)}=\dfrac{e^{in\frac{x}{2}}\left(2i\sin\left(n\frac{x}{2}\right)\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}=e^{i(n-1)\frac{x}{2}}\dfrac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

On a alors 3 cas :

- Si on a $\dfrac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}>0$ alors $|Z|=\dfrac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $\arg(Z)=(n-1)\frac{x}{2}\ [2\pi]$.
- Si on a $\dfrac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}<0$ alors $|Z|=\left|\dfrac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|$ et $\arg(Z)=(n-1)\frac{x}{2}+\pi\ [2\pi]$.
- Si on a Si on a $\dfrac{\sin\left(n\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=0$ alors $Z=0$; son module est nul et il n'a pas d'argument.

Exercice 6

Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé, sachant que $\cos(kx)=\mathbf{Re}\left(e^{ikx}\right)$, calculer $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

De même, calculer $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$

Remarque : on aura besoin de discuter selon les valeurs de x.

Solution :

$S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{Re}\left(e^{ikx}\right)=\mathbf{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\mathbf{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k\right)$.

Si $e^{ix}=1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=n+1$, et $S=n+1$.

Sinon $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix}\neq1$, et on a :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=1\times\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$

En utilisant la méthode de factorisation de l'angle moitié, on a :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\times\frac{e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}-e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

de sorte que $S=\mathbf{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k\right)=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

De même, $T=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{Im}\left(e^{ikx}\right)=\mathbf{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\mathbf{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k\right)$.

Si $e^{ix}=1$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=n+1$, et $T=0$.

Sinon $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$, et on a :
$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = 1 \times \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$
En utilisant la méthode de factorisation de l'angle moitié, on a :
$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
de sorte que $T = \mathbf{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 7

Donner la formule d'Euler. Linéariser $\cos(t)^3$ et $\sin(t)^3$. En déduire $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^3\, dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)^3\, dt$.
Pouvait-on prévoir ces résultats ?

Solution :

$\cos(t)^3 = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}\left(e^{3it} + 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} + e^{-3it}\right) = \frac{1}{2^3}\left(e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}\right)$
$\cos(t)^3 = \frac{1}{2^3}\left(2\cos(3t) + 3 \times 2\cos(t)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos(3t) + 3\cos(t)\right)$
Une primitive de $\cos(t)^3$ est donc $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin(3t) + 3\sin(t)\right)$.
Donc $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)^3\, dt = 0$
$\sin(t)^3 = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{3it} - 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} - e^{-3it}\right) = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right)$
$\sin(t)^3 = \frac{1}{(2i)^3}\left(2i\sin(3t) - 3 \times 2i\sin(t)\right) = \frac{-1}{4}\left(\sin(3t) - 3\sin(t)\right)$
Une primitive de $\sin(t)^3$ est donc $\frac{-1}{4}\left(\frac{-1}{3}\cos(3t) + 3\cos(t)\right)$.
Donc $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)^3\, dt = 0$, ce qui est prévisible s'agissant de l'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Exercice 8

À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(4x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ puis uniquement en fonction de celles de $\cos(x)$.
À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\sin(5x)$ en fonction des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ puis uniquement en fonction de celles de $\sin(x)$.

Solution :

$\cos(4x) = \mathbf{Re}\left(e^{i(4x)}\right) = \mathbf{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^4\right) = \mathbf{Re}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^4\right)$
Et on développe la puissance :
$\cos(4x) = \mathbf{Re}\left(\cos^4(x) + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) + 6\cos^2(x)(i\sin(x))^2 + 4\cos(x)(i\sin(x))^3 + (i\sin(x))^4\right)$
$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x)$
$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (1-\cos^2(x))^2 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$

on fait de même, mais avec la partie imaginaire :
$\sin(5x) = \mathbf{Im}\left(e^{i(5x)}\right) = \mathbf{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^5\right) = \mathbf{Im}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^5\right)$
Et on développe la puissance :
$\sin(5x) = \mathbf{Im}\left(\cos^5(x) + 5\cos^4(x)(i\sin(x)) + 10\cos^3(x)(i\sin(x))^2 + 10\cos^2(x)(i\sin(x))^3 + 5\cos(x)(i\sin(x))^4 + (i\sin(x))^5\right)$
$\sin(5x) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)$
$\sin(5x) = 5(1-\sin^2(x))^2\sin(x) - 10(1-\sin^2(x))\sin^3(x) + \sin^5(x) = 16\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$

Exercice 9

Si $t \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\cos(t)^{2p} = \frac{1}{4^p}\left(\binom{2p}{p} + 2\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\cos((2p-2k)\,t)\right)$$

$$\cos(t)^{2p+1} = \frac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos((2p-2k+1)\,t)\right) = \frac{1}{4^p}\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{2p+1}{p-j}\cos((2j+1)\,t)\right)$$

Solution :
$\cos(t)^{2p} = \left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2p} = \dfrac{1}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}e^{(2p-k)it}e^{-kit}\right) = \dfrac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}e^{(2p-2k)it}\right)$

En divisant cette somme en 3 morceaux, on a : $\cos(t)^{2p} = \dfrac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}e^{(2p-2k)it} + \binom{2p}{p} + \sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{(2p-2k)it}\right)$
sur la dernière somme, on procède au changement d'indice $\ell = 2p-k$
$\sum_{k=p+1}^{2p}\binom{2p}{k}e^{(2p-2k)it} = \sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{2p}{2p-\ell}e^{-(2p-2\ell)it} = \sum_{\ell=0}^{p-1}\binom{2p}{\ell}e^{-(2p-2\ell)it}$ par symétrie des coefficients du binôme.
De telle sorte que l'on peut regrouper les deux sommes sous la forme
$\cos(t)^{2p} = \dfrac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\left(e^{(2p-2k)it}+e^{-(2p-2k)it}\right) + \binom{2p}{p}\right)$
et on reconnaît la formule d'Euler, d'où :

$$\cos(t)^{2p} = \frac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{k}\times 2\cos((2p-2k)\,t) + \binom{2p}{p}\right)$$

Pour $\cos(t)^{2p+1}$, on fait de même... mais il n'y aura plus de constante, et on trouve :
$\cos(t)^{2p+1} = \dfrac{1}{2^{2p+1}}\left(2\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos((2p-2k+1)\,t)\right) = \dfrac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos((2p-2k+1)\,t)\right)$

Exercice 10
Si $t\in\mathbb{R}$, montrer que

$$\sin(t)^{2p+1} = \frac{1}{4^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\binom{2p+1}{k}\sin((2p-2k+1)\,t)$$

de deux manières : en vous servant de l'exercice précédent et en utilisant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right) = \sin(t)$; et directement à l'aide des formules d'Euler.

Solution :
$\sin(t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)$ donc $\sin(t)^{2p+1} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)^{2p+1}$
et d'après l'exercice précédent, on a :
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)^{2p+1} = \dfrac{1}{4^p}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1}{k}\cos\left((2p-2k+1)\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\right)\right)$
et $\cos\left((2p-2k+1)\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\right) = \cos\left((p-k)\pi+\dfrac{\pi}{2}-(2p-2k+1)\,t\right) = (-1)^{p-k}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(2p-2k+1)\,t\right) = (-1)^{p-k}\sin\left((2p-2k+1)\,t\right)$
On peut remarquer que $(-1)^{p-k} = (-1)^{p+k}$. D'où la formule :

$$\sin(t)^{2p+1} = \frac{1}{4^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\binom{2p+1}{k}\sin((2p-2k+1)\,t)$$

Sinon, utiliser la formule d'Euler :
$\sin(t)^{2p+1} = \left(\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^{2p+1}$ et développer intelligemment (c'est à dire en se servant de la symétrie des coefficients du binôme, et en retrouvant des formule d'Euler).

Exercice 11

1. Si z est un complexe de module 1 alors justifier que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Si z_1 et z_2 sont deux complexes de module 1 et tels que $z_1\,z_2 \neq -1$, montrer que $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1\,z_2}$ est un réel.

Solution :

1. Si $|z| = 1$ alors $z = e^{i\theta}$, avec $\theta\in R$.
   Et on a $\overline{z} = e^{-i\theta}$ tandis que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{ei\theta} = e^{-i\theta}$.

La réciproque est vraie : $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ implique par produit en croix que $z\overline{z} = 1$, soit $|z|^2 = 1$, et donc $|z| = 1$ car un module est toujours positif.

2. On montre que Z est un réel en montrant que $\overline{Z} = Z$.

   On se sert du fait que z_1 et z_2 sont deux complexes de module 1 donc $\overline{z_1} = \dfrac{1}{z_1}$ et $\overline{z_2} = \dfrac{2}{z_2}$ et on a :
   $\overline{Z} = \dfrac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = ... = Z$

Exercice 12

1. Trouver les complexes $Z = re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $Z^7 = 1$.
2. En déduire, dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $\qquad z^7 = (z+i)^7$

   Indication : ne pas oublier de discuter des conditions sur z.

Solution :

1. Si $Z = re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $Z^7 = 1 \iff r^7 e^{i7\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^7 = 1 \\ 7\theta = 0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\ \left[\dfrac{2\pi}{7}\right] \end{cases}$

   Ainsi, $Z^7 = 1 \iff Z = e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ avec $k \in [\![0;6]\!]$, et on a alors 7 solutions distinctes.
2. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = -i$ n'est pas solution de l'équation $z^7 = (z+i)^7$.

   Donc $z^7 = (z+i)^7 \iff \left(\dfrac{z}{z+i}\right)^7 = 1$.

   D'après la question précédente, on a l'équivalence $\left(\dfrac{z}{z+i}\right)^7 = 1 \iff \left(\dfrac{z}{z+i}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{7}}$, avec $k \in [\![0;6]\!]$.

   Soit $k \in [\![0;6]\!]$ fixé, on a : $\left(\dfrac{z}{z+i}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{7}} \iff z = (z+i)e^{i\frac{2k\pi}{7}} \iff z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{7}}\right) = ie^{i\frac{2k\pi}{7}}$

   Si $k = 0$ alors il n'y a pas de solution car l'équation devient $0z = ie^{i\frac{2k\pi}{7}}$.

   Si $k \in [\![1;6]\!]$, alors $1 - e^{i\frac{2k\pi}{7}} \neq 0$, et $z = \dfrac{ie^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{7}}} = \dfrac{ie^{i\frac{k\pi}{7}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} = \dfrac{-e^{i\frac{k\pi}{7}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}$ avec les formules de l'angle moitié.

   On a donc 6 solutions : $z = \dfrac{-e^{i\frac{k\pi}{7}}}{2\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} = \dfrac{-\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - \dfrac{1}{2}i$ avec $k \in [\![1;6]\!]$.

Exercice 13

Si $z \in \mathbb{C}$ est de module 1, exprimer le module et un argument des nombres suivants en fonction de ceux de z :

$$1 + z \qquad \text{et} \qquad 1 + \overline{z}$$

Solution :

z de module 1 s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec et $\theta \in]-\pi;\pi]$.

Alors avec les formules de l'angle moitié, on a : $1 + z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$

Or $\theta \in]-\pi;\pi]$ donc $\dfrac{\theta}{2} \in \left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geq 0$. On a alors deux cas :

• Si $\theta = \pi$ alors $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$ et donc $1 + z = 0$.

• Sinon, $\theta \in]-\pi;\pi[$ donc $\dfrac{\theta}{2} \in \left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$.

D'où $|1 + z| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(1 + z) = \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$.

On remarque ensuite que $1 + \overline{z}$ est le conjugué de $1 + z$ donc ils ont le même module et un argument opposé (si $1 + \overline{z} \neq 0$). On a donc les deux mêmes sous cas :

• Si $\theta = \pi$ alors $1 + \overline{z} = 0$.

• Sinon $\theta \in]-\pi;\pi[$ alors $|1 + \overline{z}| = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $\arg(1 + \overline{z}) = - = \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$

Exercice 14

1. Trouver les complexes $Z = re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $Z^n = 1$.
2. En déduire, dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation
$$(z+1)^n + (z-1)^n = 0$$
$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0$$
Indication : ne pas oublier de discuter des conditions sur z.

Solution :

1. Si $Z = re^{i\theta}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors $Z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$

   Ainsi, $Z^n = 1 \iff Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0; n-1]\!]$, et on a alors n solutions distinctes.

2. • Résolvons l'équation $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$:
$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \iff (z+1)^n = (z-1)^n$$
Si $z \in \mathbb{C}$, $z = 1$ n'est pas solution de l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

   Donc $(z+1)^n = (z-1)^n \iff \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

   D'après la question précédente, on a l'équivalence $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \iff \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$.

   Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ fixé, on a : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff z+1 = (z-1)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

   Si $k = 0$ alors il n'y a pas de solution car l'équation devient $0z = -2$.

   Si $k \in [\![1; n-1]\!]$, alors $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$, et $z = \dfrac{-1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(-e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)} = \dfrac{-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{-i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec les formules de l'angle moitié.

   On a donc $n-1$ solutions : $z = \dfrac{-i\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![1; n-1]\!]$.

   • Résolvons l'équation $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$:
$$(z+1)^n + (z-1)^n = 0 \iff (z+1)^n = -(z-1)^n \iff (z+1)^n = e^{i\pi}(z-1)^n \iff (z+1)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)\right)^n$$
Si $z \in \mathbb{C}$, $z = 1$ n'est pas solution de l'équation $(z+1)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)\right)^n$.

   Donc $(z+1)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)\right)^n \iff \left(\dfrac{z+1}{e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)}\right)^n = 1$.

   D'après la question précédente, on a l'équivalence $\left(\dfrac{z+1}{e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)}\right)^n = 1 \iff \left(\dfrac{z+1}{e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0; n-1]\!]$.

   Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ fixé, on a : $\left(\dfrac{z+1}{e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff z+1 = e^{i\frac{\pi}{n}}(z-1)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \iff z\left(1 - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}\right) = -1 - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$

   Si $k \in [\![0; n-1]\!]$, alors $1 - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}} \neq 0$, et donc $z = \dfrac{-1 - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}} = \dfrac{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\left(-e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\right)} = \dfrac{-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{-2i\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)} = \dfrac{-i\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$ avec les formules de l'angle moitié.

   On a donc n solutions : $z = \dfrac{-i\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$ avec $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Exercice 15

Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls, justifier que $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et préciser le cas d'égalité.
En déduire que pour tous complexes z_1 et z_2 non nuls, on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et préciser le cas d'égalité.
Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes non nuls, justifier que
$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$ et préciser le cas d'égalité.

Solution :

$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ représente l'inégalité triangulaire :
si A_1 est le point d'affixe z_1 et A_2 est le point d'affixe z_2 et O l'origine du repère, on a

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \iff A_1A_2 \leq A_1O + OA_2$$

ce qui est précisément l'inégalité triangulaire pour le triangle OA_1A_2.
On a l'égalité si et seulement si le triangle est aplati et que $O \in [A_1A_2]$, c'est à dire ssi l'un des complexes z_1 ou z_2 est nul ou bien s'ils sont tous deux non nuls et d'argument $\arg(z_2) = \pi + \arg(z_1)$ $[2\pi]$.
En appliquant l'inégalité précédente à $-z_2$, on a :
$|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2|$; or $|-z_2| = |z_2|$. Donc $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
On a l'égalité si et seulement si le triangle OA_1A_2', où A_2' est le point d'affixe $-z_2$ (donc le symétrique de A_2 par rapport à l'origine) est aplati et que $O \in [A_1A_2']$, c'est à dire ssi l'un des complexes z_1 ou z_2 est nul ou bien s'ils sont tous deux non nuls et d'argument égaux $\arg(z_2) = \arg(z_1)$ $[2\pi]$.
Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes non nuls, en appliquant deux fois de suite l'inégalité triangulaire, on a : $|z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3|$.
Donc $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1 + z_2| + |z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.
On a $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ ssi $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + z_2| + |z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ ssi $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + z_2| + |z_3|$.
$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + z_2| + |z_3|$ ssi l'un des complexes z_1 ou z_2 est nul ou bien s'ils sont tous deux non nuls et d'argument égaux $\arg(z_2) = \arg(z_1)$ $[2\pi]$ et l'un des complexes $z_1 + z_2$ ou z_3 est nul ou bien s'ils sont tous deux non nuls et d'argument égaux $\arg(z_1 + z_2) = \arg(z_3)$ $[2\pi]$
Si on exclut le cas où l'un des complexes est nul, on a l'égalité ssi leurs arguments sont égaux modulo 2π.