Exercices sur les suites : Encadrement des termes de suites

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin(n)}{3^n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n| \leq 2 \times \dfrac{1}{3^n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n(2 - \sin(n))}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{3n} \leq v_n \leq \dfrac{1}{n}$.
En déduire que la suite (v_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n \cos(n)}{n-1}$.
Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $|u_n - 3|$ est majorée par le terme général d'une suite convergeant vers 0. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par $u_n = \dfrac{n!}{n^2}$.

Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a : $u_n \geq \dfrac{(n-1)(n-2)}{n}$. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+2n+1}$.

1. Écrire u_n à l'aide du symbole $\sum$.
2. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 2n+1$ on a : $\dfrac{1}{n^2+2n+1} \leq \dfrac{1}{n^2+k} \leq \dfrac{1}{n^2}$
3. En déduire un encadrement de la suite (u_n).
4. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 6

À tout entier naturel n $(n \geq 1)$, on associe les sommes s_n et t_n définies par :

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^4+k}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}}$$

1. **a.** Dire, en justifiant, quels sont, dans l'expression de s_n, le plus petit et le plus grand des termes qui composent cette somme.
   b. Déterminer un encadrement de s_n.
   c. Montrer à l'aide de cet encadrement que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = 1$.
2. En utilisant la même démarche, trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Donner une minoration de u_n par le terme général d'une suite divergente.

Exercice 8

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $w_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)!}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$ on a l'inégalité : $1! + 2! + \cdots + (n-1)! \leq n!$
2. Justifier que pour tout $n \geq 2$ on a : $0 < w_n \leq \dfrac{2}{n+1}$
3. Que peut-on en déduire sur la suite (w_n) ?

Exercices sur les suites adjacentes

Exercice 1 : Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que ces suites sont adjacentes.

Exercice 2 : On étudie les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. a. Calculer $u_{n+1} + v_{n+1}$ en fonction de $u_n + v_n$
   b. Que peut-on en déduire sur la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
5. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3 : Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par les formules suivantes :

1. $u_n = \dfrac{-1}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{1}{n+3}$.
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. $u_n = 3 - \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = 3 + \dfrac{1}{n^3}$.

Étudier si ces suites sont adjacentes. Dans ce cas, déterminer leur limite commune.

Exercice 4 : Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par les formules suivantes :
$u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

1. Écrire ces suites à l'aide du symbole $\sum$.
2. Montrer que ces suites sont adjacentes. (Remarque : on montre que leur limite commune est e).

Exercice 5 : Soient les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par les formules suivantes :
$\forall n \geq 1, \quad u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

Montrer que ces suites sont adjacentes. (Remarque : on peut montrer que leur limite commune est $\dfrac{\pi^2}{6}$).

Exercice 6 : Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que les suites sont bien définies (i.e on peut calculer tous leurs termes).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$; puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n - v_n \geq 0$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{u_n - v_n}{2}$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 7 : Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un réel k tel que , quel que soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - u_{n+1} = k(v_n - u_n)$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n < v_n$.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
4. Soit $w_n = \sum_{p=0}^{n}(v_p - u_p)$. Donner l'expression de w_n en fonction de n.
5. Exprimer $\sum_{p=0}^{n}(u_{p+1} - u_p)$ en fonction de w_n, puis en fonction de u_n et de u_0.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
7. Quelle est la limite de (v_n) ?

Exercice 8 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et v_2 puis u_3 et v_3.
2. On définit la suite (w_n) par $w_n = v_n - u_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On définit la suite (t_n) par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
5. Montrer que (t_n) est une suite constante.
6. En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercices sur les suites avec Scilab

Voici quelques propriétés usuelles en Scilab :

L'instruction 1 : 11 permet de créer la liste de tous les entiers allant de 1 à 11, ce qui sera utile pour les boucles for :

1 :11 donne : `1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.`

Voici l'usage d'une boucle for :

```
u=1
for i=1:3
u=2*u+1
end
```

donne :

```
 u  =

    3.
 u  =

    7.
 u  =

    15.
```

Voici la définition d'une fonction que l'on appelle calcul : elle prend comme argument n supposé être un entier et retourne u à la fin des calculs

```
function u=calcul(n)
u=1; // premier terme imposé
for i =1:n
        u=2*u+1;
end // fin du for
endfunction

calcul(2)
calcul(3)
```

donne :

```
-->calcul(2)
 ans  =

    7.

-->calcul(3)
 ans  =

    15.
```

Voici la définition d'une boucle while :

```
// suite géométrique v1=3 et raison =5
// quel premier indice permet de dépasser
//strictement 1000 ?
i = 1;
v = 3;
while ( v <= 1000 )
v = 5*v;
i = i+1;
end
disp(i)  /// que représente i ???
```

donne :

```
-->i = 1;

-->v = 3;

-->while ( v <= 1000 )
-->v = 5*v;
-->i = i+1;
-->end

-->disp(i)  ///  que représente i ???

    5.
```

Exercices sur les suites avec Scilab :

Exercice 1 :

On considère (u_n) définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n + 6$ pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer les cinq premiers termes de (u_n) à l'aide d'un algorithme.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. Trouver α tel que $\alpha = 3\alpha + 6$
4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - \alpha$ pour tout $n \geq 1$.
   - **a.** À l'aide d'un algorithme, calculer les cinq premiers termes de (v_n) puis conjecturer la nature de la suite (v_n).
   - **b.** Démontrer cette propriété.
   - **c.** En déduire l'expression de v_n puis u_n en fonction de n.

5. **a.** Avec l'ordinateur, trouver le premier entier n tel que $u_n > 10^6$
   b. Retrouver ce résultat par le calcul en vous servant de **4.c.**

Exercice 2 :

1. On définit la suite des factorielles par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$: $u_n = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, que l'on note aussi $u_n = \prod_{k=1}^{n} k$.
   On ne s'intéressera qu'au cas où $n \geq 1$.
   a. À l'aide d'un algorithme, calculer les 8 premiers termes de (u_n) à partir de u_1.
   b. Écrire une fonction Scilab "factoriel" qui prend comme argument un entier $n \geq 1$ et qui retourne u_n.
   c. Ajouter une structure conditionnelle "If ... Then ... End" afin de gérer l'exception que constitue u_0.
   d. Quelle relation de récurrence lie u_{n+1} et u_n ?
2. On peut aussi définir la suite des factorielles par $v_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$: $v_{n+1} = v_n \times (n+1)$.
   a. À l'aide d'un algorithme, calculer les 8 premiers termes de (v_n) à partir de v_1.
   b. Écrire une fonction Scilab "factorielBIS" qui prend comme argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne v_n.
3. À l'aide d'un algorithme, calculer le premier entier n pour lequel $n! > 10^9$.

Exercice 3 :

On définit la suite des coefficients du binôme de Newton comme $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$.

1. Créer une fonction Scilab appelée "*combinaison*" qui prend comme arguments (n, k) entiers tels que $0 \leq k \leq n$, et qui retourne $combinaison(n,k) = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$
2. Calculer pour n allant de 0 à 5 et k allant de 0 à n tous les coefficients $\binom{n}{k}$; on rangera les résultats dans une matrice A de taille 6×6 : avec les notations de Scilab, $A(n+1, k+1) = combinaison(n,k)$.
3. En se servant de la relation de Pascal $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ et des relation $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, construite une matrice B de taille 6×6 correspondant au calcul ligne par ligne des coefficients $\binom{n}{k}$ pour n allant de 0 à 5.
4. Vérifier avec l'ordinateur que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ puis que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Exercice 4 :

On définit la suite de Fibonacci par les premiers termes $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Calculer les 6 premiers termes à l'aide d'une boucle "For"
2. Créer une fonction "Fibo" qui prend comme paramètre un entier n et qui renvoie $Fibo(n) = u_n$.
3. Conjecturer le comportement asymptotique de (u_n).
4. On définit (v_n) par $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   a. Calculer les 5 premiers termes de (v_n).
   b. Conjecturer le comportement asymptotique de (v_n).
   c. On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ appelé nombre d'or, donner le premier entier n tel que $|v_n - \varphi| < 10^{-3}$, faire de même avec 10^{-4} et 10^{-5}. Quelle conjecture peut-on émettre ?
5. Vérifier que sur les premiers termes, on la relation $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$
   Remarque : on peut démontrer cette relation par récurrence double, mais le plus simple c'est d'utiliser le théorème du cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
6. Vérifier que sur les premiers termes, on la relation $u_{n+1} \times u_{n-1} - (u_n)^2 = (-1)^n$
   On peut démontrer cette relation par récurrence ou en utilisant une relation matricielle (cf chapitre sur les matrices).

Exercice 1
Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. $A \subset B \Longrightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$
2. $A \cup B$ est majoré ; déterminer $\sup(A \cup B)$.

Exercice 2
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit alors la partie $A+B = \{a+b\,,\ a \in A\,,\, b \in B\}$ autrement dit $A+B = \{x \in \mathbb{R}\ \exists a \in A\,,\ \exists b \in B\,,\ x = a+b\}$.

1. Démontrer qu'avec cette définition $[1\,;\,2[+[2\,;\,3[=[3\,;\,5[$.
2. Démontrer que si A et B sont majorées, alors $A+B$ l'est aussi et $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 3
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^+$. On définit alors la partie $AB = \{a.b\,,\ a \in A\,,\, b \in B\}$ autrement dit $AB = \{x \in \mathbb{R}\ \exists a \in A\,,\ \exists b \in B\,,\ x = a.b\}$.
Démontrer que, si A et B sont majorées, alors AB l'est aussi, et déterminer sa borne supérieure.

Exercice 4
Quelles sont les bornes supérieure et inférieure, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble : $\left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$?

Exercice 5
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels, et ε est un réel strictement positif. Parmi les énoncés suivants, lesquels sont équivalents ? Et quelles implications a-t-on ?

1. $\exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geq N\,,\ |u_n| < \varepsilon$
2. $\forall N \in \mathbb{N}\,,\ \exists n \geq N\,,\ |u_n| < \varepsilon$
3. $\exists n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n| < \varepsilon$
4. $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ |u_n| < \varepsilon$
5. Il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $|u_n| < \varepsilon$
6. u_n est, en valeur absolue, strictement inférieur à ε à partir d'un certain rang
7. Tous les réels u_n sont, en valeur absolue, strictement inférieurs à ε
8. $|u_n| < \varepsilon$ pour n assez grand
9. Un des $|u_n|$ est strictement inférieur à ε

Exercice 6
Démontrer qu'une suite qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs et qui est convergente est stationnaire.

Exercice 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que la suite u converge si, et seulement si, elle est stationnaire.

Exercice 8
Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse :

1. Si $\lim u_n = 0$ alors $\lim u_n v_n = 0$.
2. Si $\lim u_n v_n = 0$ alors $\lim u_n = 0$ ou $\lim v_n = 0$.
3. Si $\lim u_n u_{n-1} = 0$ alors $\lim u_n = 0$.
4. Si $\lim(u_n + u_{n+1}) = +\infty$ alors $\lim u_n = +\infty$.
5. Si (u_n) est une suite strictement décroissante à termes positifs ou nuls, alors $\lim u_n = 0$.
6. Si $\lim u_n = 0$ et si (u_n) est une suite à termes positifs ou nuls, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
7. Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim(nu_n) = +\infty$.
8. Si $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim(u_n)^n = +\infty$.
9. Si (u_n) et (v_n) sont bornées et si $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
10. Si (u_n) est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente.
11. Si $(|u_n|)$ est convergente, alors (u_n) est convergente.
12. Si pour tout n, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et $\lim u_n = 0,\ \lim w_n = 1$, alors $\lim v_n \in [0\,;\,1]$.
13. Si (u_n) est convergente, alors $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.
14. Si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors (u_n) est convergente.
15. Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \longrightarrow +\infty$.
16. Si $u_n \longrightarrow +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.
17. Si $u_n \longrightarrow +\infty$, alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 9
Montrer que si l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est injective, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Exercice 10
Étudier la convergence des suites de terme général u_n suivantes et leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{3n^2}{(n^2+2)\,3^n}$
2. $u_n = \dfrac{\sin(2n+1)}{\sqrt{n}}$
3. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ (utiliser l'expression conjuguée)
6. $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$
7. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
8. $u_n = \dfrac{4n+(-1)^n}{3n-2(-1)^{n+1}}$
9. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n^2}$
10. $u_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
11. $u_n = \sqrt[n]{n}$
12. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$
13. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$
14. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
15. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$
16. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{\sqrt{n+k}}$

Exercice 11
Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 12 ***Suite complexe***
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$ pour que la suite de terme général z^n soit bornée.
Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$ pour que la suite de terme général z^n soit convergente.

Exercice 13
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
On veut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} - S_n = 0$ et (pourtant) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

1. Que vaut $S_{n+1} - S_n$? Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} - S_n = 0$.
2. Que peut-on dire de la monotonie de la suite (S_n) ? Que peut-on en déduire sur son comportement possible lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Supposons que la suite (S_n) est majorée par M.
   - **a.** Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $S_{2k} - S_k \geq \dfrac{1}{2}$
   - **b.** En justifiant que $S_{2^n} - S_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} S_{2^{i+1}} - S_{2^i}$, prouver une contradiction.
   - **c.** Conclure.

Exercice 14
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes strictement positifs vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$.

1. On suppose ici que $a < 1$.
   - **a.** Montrer que u est décroissante à partir d'un certain rang.
   - **b.** En déduire que u converge vers une limite ℓ.
   - **c.** Démontrer que $\ell > 0$ est impossible puis conclure.
2. On suppose ici que $a > 1$.
   - **a.** Montrer que u est croissante à partir d'un certain rang.
   - **b.** Montrer que la convergence de la suite u est impossible et conclure.
3. Donner trois exemples de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et telles que l'on ait respectivement :
   - **a.** u converge vers une limite finie non nulle.
   - **b.** u converge vers 0.
   - **c.** u tend vers $+\infty$.

Exercice 15 *Application de l'exercice précédent*

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3. Soit (w_n) la suite de terme général $w_n = \dfrac{n^3}{2^n}$. Calculer $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 16

Montrer que les couples de suites ci-dessous sont des suites adjacentes :

1. $u_0 = a$, $v_0 = b$ avec $0 < a < b$, et $u_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ (préciser dans ce cas la limite commune).

2. Pour $n \geq 1$, $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$

Exercice 17

Étudier le comportement des deux suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ définies pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$$

SOLUTION :

Pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n > 0$, comme produit de réels strictement positifs.
Et de même, pour tout entier $n \geq 2$, on a $v_n > 0$.
On a alors : pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
D'où (u_n) croissante puisqu'à termes strictement positifs et vérifiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \geq 2$.

Pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}} \times \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}$

et on montre que $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{1+\frac{1}{n}} \leq 1$ par équivalence : $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{1+\frac{1}{n}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+1)^3} \leq 1 + \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{(n+1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)^3 - n(n+1)^2 - n(n+1) - n}{n(n+1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n(n+1)^3} \geq 0$, ce qui est évident.

D'où (v_n) décroissante puisqu'à termes strictement positifs et vérifiant $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ pour tout $n \geq 2$.

Autre méthode : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{(n+1)^4} = \dfrac{(n+1)^4-1}{(n+1)^4}$ et donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ pour tout $n \geq 2$.

Pour tout $n \geq 2$ on a : $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \times u_n$.
Si on arrive à prouver que (u_n) est bornée alors on pourra conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

On remarque que $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \times u_n$ donc $v_n - u_n > 0$.
Donc pour tout $n \geq 2$ on a $u_n < v_n$. Et puisque (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, on a $u_2 \leq u_n < v_n \leq v_2$.
Donc la suite (u_n) est bornée et $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \times u_n$ tend vers 0.
Ainsi, les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc toutes deux convergentes, et convergent vers la même limite.

Exercice 18 ***suites adjacentes***

On considère les suites u et v définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$.
2. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$. Justifier qu'elles convergent vers une même limite que l'on notera ℓ.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n)$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}$.

Solution :

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$. En déduire que $\forall x > 0,\ f(x) \geq 0$.
2. $\forall n \geq 1$ on a $u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$, et se servir de la question 1 pour un x bien choisi.
   Faire de même pour $v_{n+1} - v_n$.
   (u_n) est décroissante et (v_n) croissante, et elles sont adjacentes.
3. (u_n) converge vers ℓ donc (u_{2n}) converge aussi vers ℓ, et par opération sur les limites : $\lim_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n) = \ell - \ell = 0$.
   $u_{2n} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \ln(2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} - \ln(2)$, en ayant posé le changement d'indice $k = n + j \Leftrightarrow j = k - n$

Exercice 19

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On veut démontrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

On introduit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$. En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. Que peut-on dire de la monotonie de la suite (S_n) ? Que peut-on dire de son comportement possible lorsque n tend vers $+\infty$?
4. En utilisant la relation entre S_n et u_n, conclure quant à la nature de la suite (S_n).

Solution :

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln(x)$. En déduire que $\forall x > 0,\ f(x) \geq 0$. Conclure.
   Appliquer l'inégalité précédente pour $n \geq 1$ fixé à $x = \frac{n+1}{n}$ puis à $x = \frac{n}{n+1}$ qui sont bien des réels dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.
   De plus $\forall n \geq 1,\ u_n - v_n = -\ln(n) + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
3. Pour tout entier $n \geq 1$: $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} > 0$ donc (S_n) est strictement croissante.
   (S_n) est croissante donc ou bien elle est majorée et alors elle converge ; ou bien elle est non majorée et alors elle tend vers $+\infty$.
4. $S_n = u_n + \ln(n)$. Puisque (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 20
Soient x_0 et y_0 deux nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que $x_0 < y_0$ et les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\,(x_n + \sqrt{y_n})$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}\,(y_n + \sqrt{x_n})$.
Étudier les deux suites (x_n) et (y_n).

Solution :
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 < x_n < y_n$.
En déduire que, puisque $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}\,(\sqrt{x_n} - y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a (y_n) décroissante.
En déduire que (y_n) converge. Puis que (x_n) converge.
En notant $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, montrer que $\ell_1 = \sqrt{\ell_2}$ et $\ell_2 = \sqrt{\ell_1}$.
En conclure que $\ell_1 = \ell_2 = 1$.

Exercice 21
Quelle est la nature des suites u et v définies par $1 < u_0 < v_0$ et
$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\sqrt{v_n}}$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n\sqrt{u_n}}$?

Solution :
Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^{1/4}$. D'où une récurrence possible. Tout dépend donc de $\dfrac{u_0}{v_0}$ par rapport à 1.
Si $u_0 < v_0$ on en déduit donc que $\dfrac{u_n}{v_n} < 1$ pour tout n.
Puis que $1 < u_n < v_n$ pour tout n. Puis que $v_{n+1} \leq v_n$. Donc (v_n) est décroissante. Puis convergente.
(u_n) converge aussi. Leur limite respective ℓ_1 et ℓ_2 sont égales à 1.

Exercice 22
Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution a_n dans $[0;1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Solution :

1. Pour un $n \geq 1$ fixé, étudier la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k - 1$. Et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
2. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}$ donc sachant que $f_n(a_n) = 0$, on a $f_{n+1}(a_n) > 0$.
   Donc f_{n+1} étant croissante et puisque $f_{n+1}(a_n) > 0$ et $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$, on a $a_{n+1} < a_n$.
   Vérifier que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ pour tout n, et utiliser le fait que f_n est strictement croissante.
3. (a_n) décroissante et minorée converge.
   Montrer que si $\delta > \dfrac{1}{2}$ est fixé, $(f_n(\delta))$ tend vers une limite >0. En déduire que $a_n < \delta$ à partir d'un certain rang.
   En déduire que pour tout $\delta > 1/2$, à partir d'un certain rang $\dfrac{1}{2} \leq a_n \leq \delta$. Conclure.

Exercice 23
On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}\ ;\ n \in \mathbb{N}$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, c'est à dire vers un nombre irrationnel.

Solution :
(u_n) est strictement croissante : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ pour tout entier n.

(v_n) est strictement décroissante à partir de $n = 2$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{-(n-1)}{(n+1)!}$ pour tout entier n.
$v_n - u_n = \dfrac{1}{n!}$ tend vers 0 donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent et qu'elles ont une même limite ℓ.
Et on a : pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n < \ell < v_n$ puisque les suites sont adjacentes et strictement monotones.
Pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n < \ell < v_n$, et u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = \dfrac{a_n}{n!}$ avec a_n entier et $v_n = \dfrac{1+a_n}{n!}$.
Si on suppose ℓ rationnel, alors il existe une écriture de ℓ comme $\ell = \dfrac{A}{N!}$ avec A entier et $N \geq 2$ (si $N = 1$ alors ℓ serait entier or $u_2 = 2,5$ et $v_2 = 3$ et $u_2 < \ell < v_2$ donc ℓ non entier.
Mais alors on a en particulier pour $n = N$: $u_N < \ell < v_N$ prouve que $a_N < A < 1 + a_N$, ce qui est impossible car a_n et $1 + a_n$ sont deux entiers consécutifs.

Exercice 24

Soit u la suite réelle vérifiant $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + n$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer qu'il existe un couple (a, b) de réels tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = an + b$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = 2w_n + n$.
2. Montrer alors que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = u_n + n + 1$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 2z_n$.
3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n puis celle de u_n.

Solution :

On trouve que (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = -n - 1$ convient.
(z_n) est géométrique donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n = z_0 \times 2^n$. Puis $u_n = z_n - n - 1$.

Exercice 25

Soient α et β deux suites satisfaisant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{k+1} = 3\alpha_k + \beta_k \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_k + 4\beta_k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 2 \\ \beta_0 = -1 \end{array} \right.$$

On introduit deux suites auxiliaires z et t en posant $z_k = \alpha_k + \beta_k$ et $t_k = 2\alpha_k - \beta_k$.

1. Montrer que les deux suites z et t sont géométriques.
2. Donner l'expression de z_k et t_k en fonction de k, puis celle de α_k et β_k.

Solution :

1. On trouve que pour tout k : $z_{k+1} = 5z_k$ et $t_{k+1} = 2t_k$
2.

Exercice 26

Soit $(u_p)_{p\geqslant 0}$ une suite satisfaisant à la relation $\forall p \geqslant 0, \quad u_{p+1} = 2u_p + 5^p$.
Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_p = \dfrac{u_p}{5^p}$.

1. Trouver la relation de récurrence qui lie α_{p+1} à α_p.
2. En déduire l'expression de α_p en fonction de p puis celle de u_p.

Solution :

Vérifier que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{p+1} = \dfrac{2}{5}\alpha_p + \dfrac{1}{5}$.
On a donc une suite arithmético-géométrique.
$\ell = \dfrac{2}{5}\ell + \dfrac{1}{5} \iff \ell = \dfrac{1}{3}$.
La suite (β_p) définie par $\beta_p = \alpha_p - \ell = \alpha_p - \dfrac{1}{3}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$. On a donc $\beta_p = \beta_0 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^p$.
Revenir à $\alpha_p = \beta_p + \dfrac{1}{3}$ puis à $u_p = 5^p\,\alpha_p$.

Exercice 27

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}_+$.
   On introduit alors la suite auxiliaire t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.
2. Montrer que la suite t est géométrique.
3. Expliciter alors t_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
   En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.

Solution :

Exercice 28

Soit u la suite vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ avec $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
2. On considère alors la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \ln u_n$.
   a. Montrer que la suite w est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   b. Expliciter w_n en fonction de n, w_1, w_0 et en déduire sa limite en $+\infty$.
3. Calculer alors la limite de (u_n) en $+\infty$ en fonction de u_0, u_1.

Exercice 29

Soit $a > 0$ et u la suite définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \ \dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
2. En déduire la convergence des suites $(\ln u_n)_n$ et (u_n).

Exercice 30

Étudier la monotonie des suites suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad b_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{n}, \quad c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - n \ln n.$$

Solution :

• Pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_{n+1} - a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1}$

Donc $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n > 0$. Donc la suite (a_n) est strictement croissante.

• Pour tout entier $n \geq 1$ on a : $b_{n+1} - b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)^2}$

Donc $\forall n \geq 1$, $b_{n+1} - b_n < 0$. Donc la suite (b_n) est strictement décroissante.

• Pour tout entier $n \geq 1$ on a : $c_{n+1} - c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \ln(k) - (n+1)\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) + n\ln(n) = n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Donc $\forall n \geq 1$, $c_{n+1} - c_n < 0$. Donc la suite (c_n) est strictement décroissante.

Exercice 31

On considère la suite u définie par : $\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = u_n \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $u_2 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geq 2, \quad 0 < u_n \leqslant 1$ puis donner la monotonie de la suite u.
2. En déduire que la suite u est convergente.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 32

On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$ et $u_0 = 2$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$. Etudier la monotonie de la suite u.
2. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 33
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 < u_n \leqslant 2$. Quelles sont les limites éventuelles de u ?
2. Montrer que $\forall x \in [0, 2], \quad \sqrt{x+2} \geqslant x$. En déduire la monotonie de la suite u.
3. Justifier la convergence de la suite u et déterminer sa limite.

Exercice 34
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$. En déduire la monotonie de u
2. La suite est-elle convergente ? Calculer sa limite.
3. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n u_0$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 35
Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$ et $u_0 = 3$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$ puis déterminer la monotonie de la suite u.
2. Justifier la convergence de la suite u et expliciter sa limite.

Exercice 36
On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant \dfrac{1}{3}$ puis que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[, \quad \dfrac{2x}{3x+1} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{6}$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{6}$. En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3 \times 2^{n-1}}$
3. Déduire des questions précédentes que la suite u converge et donner sa limite.

Exercice 37
Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et donner la monotonie de la suite u.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 38
On définit deux suites a et b par $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Conclusion.

Exercice 39 ***d'après Ecricome 2004 ECS***
On définit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de terme général a_n par :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\dbinom{2n}{n}}{4^n} \qquad \forall, n \geq 1$$

1. Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geq 1$, le rapport $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\quad a_n \leq \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$.
3. Donner le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ tel que : $\dfrac{1}{2} \leq \ell \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On admet que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Exercice 40 *d'après Essec 2013 ECE*

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. **a.** Écrire une fonction Scilab qui prend comme argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.
   b. En déduire un programme, rédigé avec Scilab, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   a. Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   b. Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.
   c. En déduire que la suite (W_n), de terme général $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k^2$, est convergente. Déterminer sa limite.