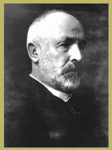
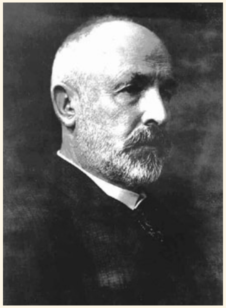
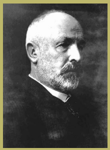


applications

J-P SPRIET



Georg Cantor
fondateur de la théorie des ensembles



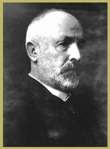
Page d'accueil
Page de garde
Page 2 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

1. Application

Supposons donnés deux ensembles E et F.

Définir une application f de E vers F c'est associer à chaque élément x de E un et un seul élément y de F.

On appelle image de x cet élément y et on note $y = f(x)$.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 3 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

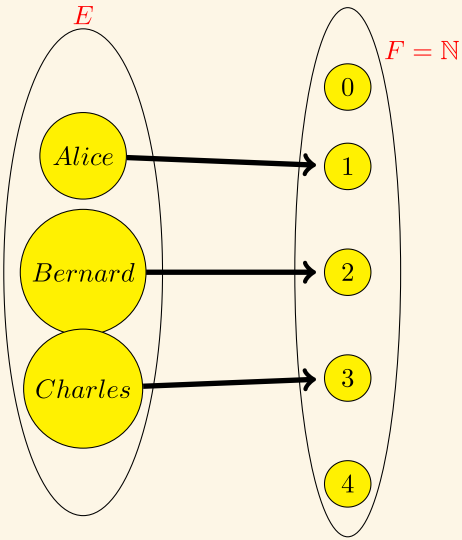
Supposons donnés deux ensembles E et F.

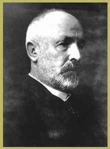
Définir une application f de E vers F c'est associer à chaque élément x de E un et un seul élément y de F.

On appelle image de x cet élément y et on note $y = f(x)$.

Exemple : Si E est l'ensemble des élèves de la classe, $E = \{Alice, Bernard, Charles\}$ et $F = \mathbb{N}$

je peux associer à chacun des élèves de la classe son numéro dans l'ordre alphabétique. Cette association sera appelée application



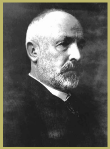


Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 4 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Remarques :

L'important ce n'est pas que tous les éléments de F soient atteints, c'est que tous les éléments de E aient une et une seule image.

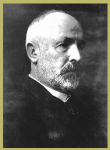


Page d'accueil
Page de garde
Page 5 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Remarques :

L'important ce n'est pas que tous les éléments de F soient atteints, c'est que tous les éléments de E aient une et une seule image.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ on parle de fonction. Une application est donc une généralisation du concept de fonction.

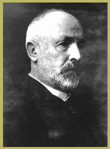


Remarques :

L'important ce n'est pas que tous les éléments de F soient atteints, c'est que tous les éléments de E aient une et une seule image.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ on parle de fonction. Une application est donc une généralisation du concept de fonction.

Définir une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel $x \in E$ son image notée $f(x)$. Pour chaque $x \in E$ il y a une seule image $f(x)$ sinon f serait ambiguë.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 7 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

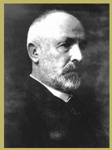
Remarques :

L'important ce n'est pas que tous les éléments de F soient atteints, c'est que tous les éléments de E aient une et une seule image.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ on parle de fonction. Une application est donc une généralisation du concept de fonction.

Définir une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel $x \in E$ son image notée $f(x)$. Pour chaque $x \in E$ il y a une seule image $f(x)$ sinon f serait ambiguë.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est bien définie.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 8 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Remarques :

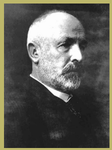
L'important ce n'est pas que tous les éléments de F soient atteints, c'est que tous les éléments de E aient une et une seule image.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ on parle de fonction. Une application est donc une généralisation du concept de fonction.

Définir une fonction $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel $x \in E$ son image notée $f(x)$. Pour chaque $x \in E$ il y a une seule image $f(x)$ sinon f serait ambiguë.

$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est bien définie.

$g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est mal définie car 0 n'a pas d'image par g.



Remarques :

L'important ce n'est pas que tous les éléments de F soient atteints, c'est que tous les éléments de E aient une et une seule image.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ on parle de fonction. Une application est donc une généralisation du concept de fonction.

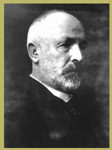
Définir une fonction $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel $x \in E$ son image notée $f(x)$. Pour chaque $x \in E$ il y a une seule image $f(x)$ sinon f serait ambiguë.

$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est bien définie.

$g \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est mal définie car 0 n'a pas d'image par g.

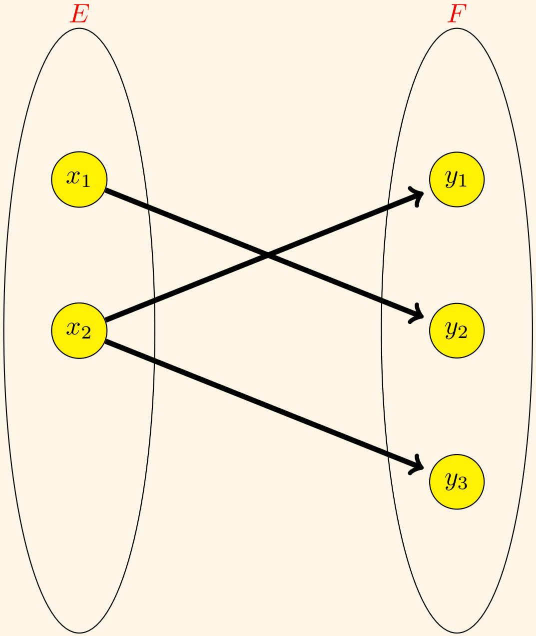
$$h \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \begin{cases} h(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ h(x) = x + 1 & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 3 \end{cases}$$

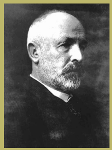
est bien définie par morceaux.



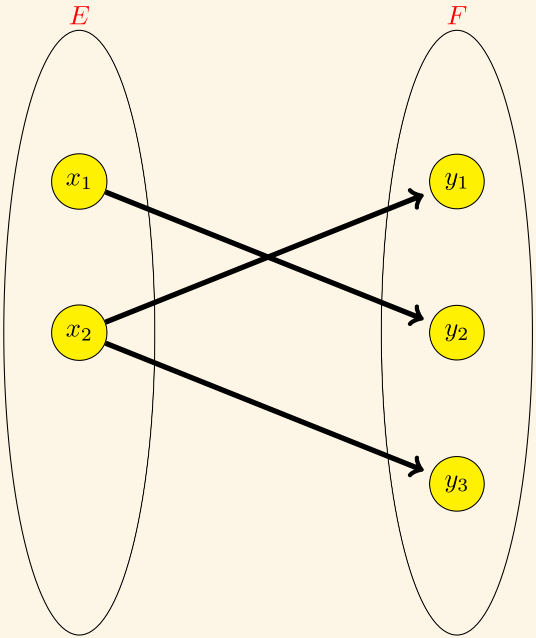
Page d'accueil
Page de garde
Page 10 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

L'application f définie par le graphe suivant est-elle bien définie ?

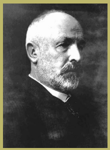




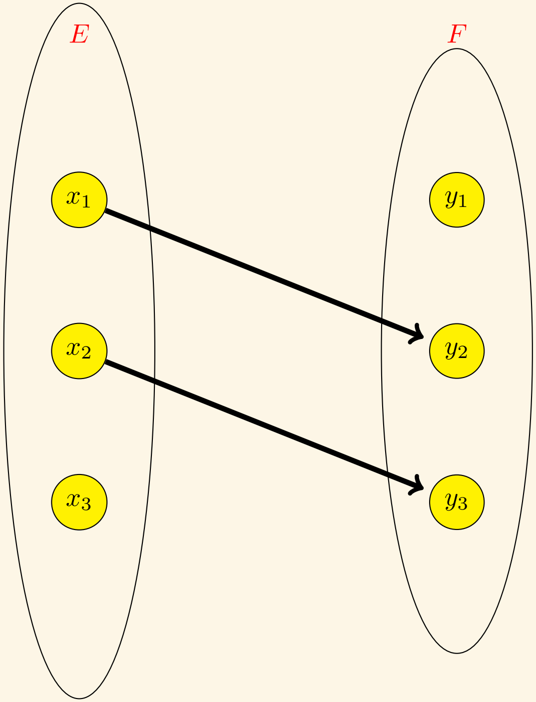
L'application f définie par le graphe suivant est-elle bien définie ?

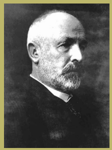


Réponse : NON car il y a une ambiguïté sur l'image de x_2 par f.



L'application g définie par le graphe suivant est-elle bien définie ?

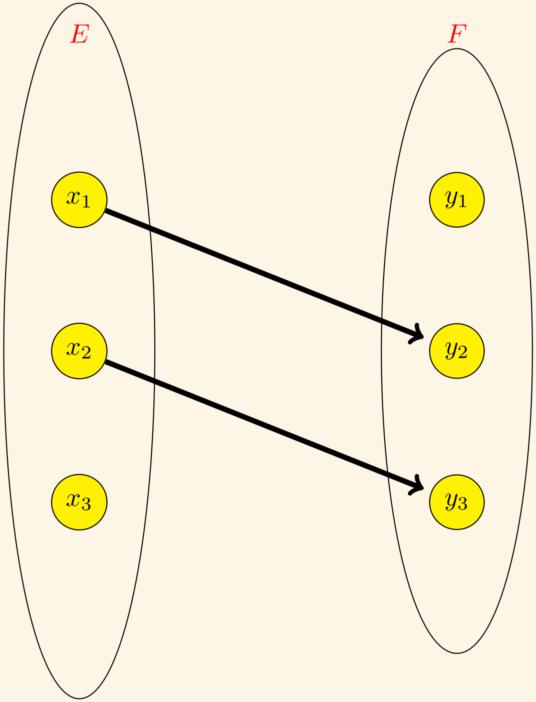




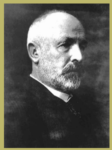
Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 13 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

L'application g définie par le graphe suivant est-elle bien définie ?



Réponse : NON car x_3 n'a pas d'image par g.



Page d'accueil

Page de garde

Page 14 / 49

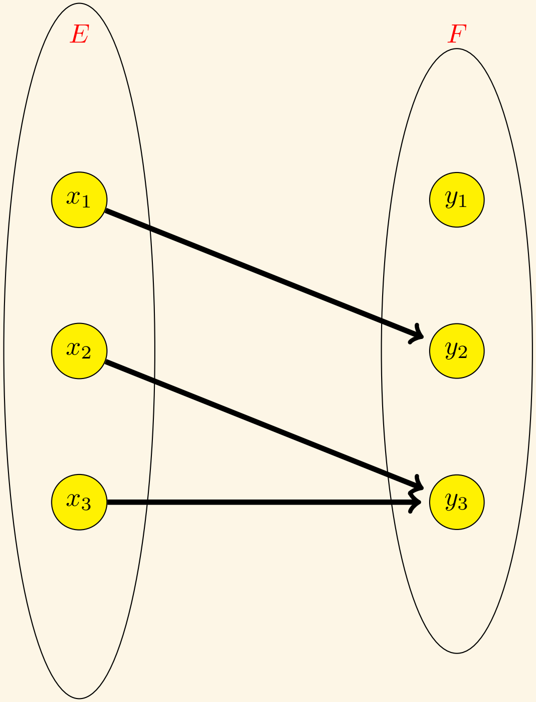
Retour

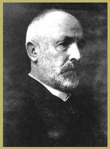
Plein écran

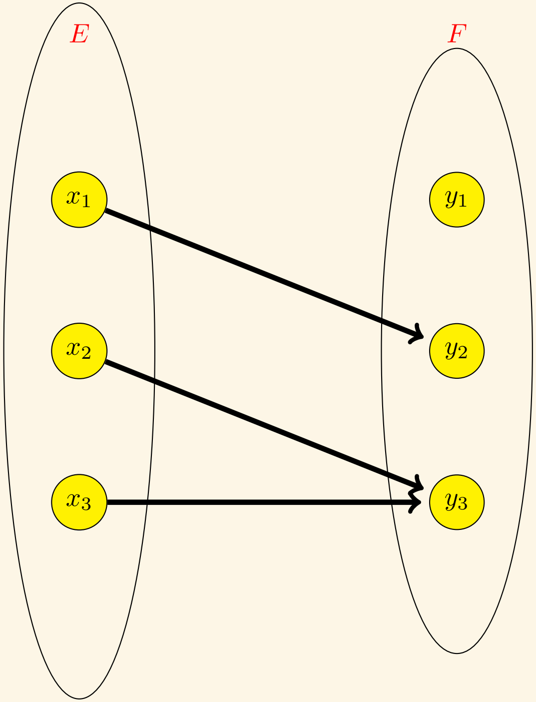
Fermer

Quitter

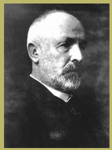
L'application h définie par le graphe suivant est-elle bien définie ?







Réponse : OUI car chaque élément de E a une et une seule image par h.



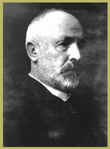
2. Injection

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.

Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède 0 ou 1 antécédent par f dans E. Zéro antécédent si y n'est pas atteint par f. Un seul si y est dans l'image $f(E)$.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions
Page d'accueil
Page de garde
Page 17 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

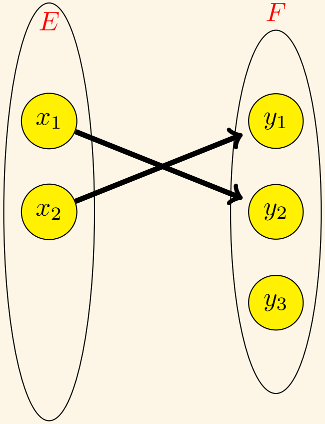
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.

Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède 0 ou 1 antécédent par f dans E. Zéro antécédent si y n'est pas atteint par f. Un seul si y est dans l'image $f(E)$.

EXEMPLE :

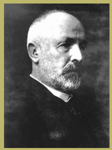


y_1 possède un unique antécédent x_2

y_2 possède un unique antécédent x_1

y_3 n'a pas d'antécédent.

Donc f est injective.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 18 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

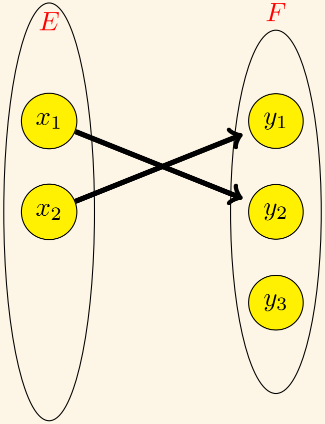
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.

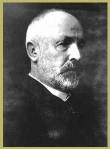
Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède 0 ou 1 antécédent par f dans E. Zéro antécédent si y n'est pas atteint par f. Un seul si y est dans l'image $f(E)$.

EXEMPLE :



Une définition équivalente est :
Deux éléments distincts dans E ont des images distinctes dans F.

C'est à dire $\forall (x_1; x_2) \in E$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



Page d'accueil
Page de garde
Page 19 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

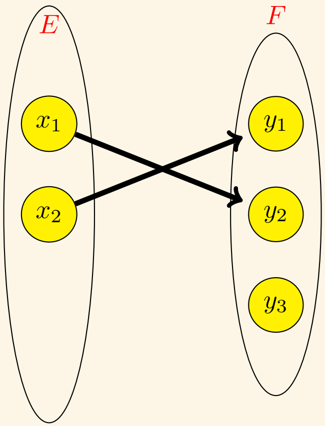
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.

Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède 0 ou 1 antécédent par f dans E. Zéro antécédent si y n'est pas atteint par f. Un seul si y est dans l'image $f(E)$.

EXEMPLE :

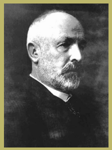


Une définition équivalente est :
Deux éléments distincts dans E ont des images distinctes dans F.

C'est à dire $\forall(x_1;x_2) \in E$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

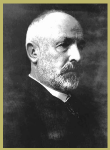
Ou encore par contraposée :

$$\forall(x_1;x_2) \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.
Donc f est non injective ssi il existe au moins un élément y de F qui admet strictement plus d'un antécédent par f dans E.



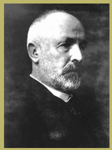
Page d'accueil
Page de garde

Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.
Donc f est non injective ssi il existe au moins un élément y de F qui admet strictement plus d'un antécédent par f dans E.

f est injective ssi deux éléments distincts dans E ont des images distinctes dans F.
Donc f est non injective ssi il existe deux éléments distincts de E qui ont la même image.



Page d'accueil
Page de garde
Page 22 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

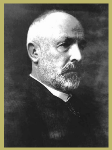
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.
Donc f est non injective ssi il existe au moins un élément y de F qui admet strictement plus d'un antécédent par f dans E.

f est injective ssi deux éléments distincts dans E ont des images distinctes dans F.
Donc f est non injective ssi il existe deux éléments distincts de E qui ont la même image.

f est injective ssi $\forall (x_1;x_2) \in E$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Ou encore par contraposée : $\forall (x_1;x_2) \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Donc f est non injective ssi $\exists (x_1;x_2) \in E,\ x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$



Page d'accueil
Page de garde
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

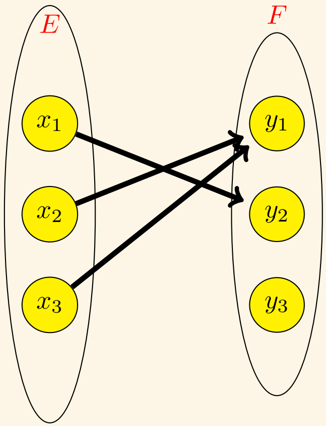
PROPRIÉTÉ : f est non injective ssi il existe au moins un élément y de F qui admet strictement plus d'un antécédent par f dans E.

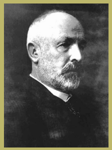
f est non injective ssi

$$\exists (x_1; x_2) \in E,\ x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2)$$

f est non injective ssi il existe deux éléments distincts de E qui ont la même image.

EXEMPLE :





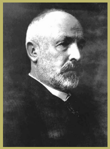
3. Surjection

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$



Page d'accueil
Page de garde
Page 25 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

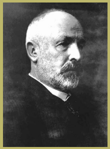
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède un ou plusieurs antécédent(s) dans E par f. C'est donc que tout y est atteint au moins une fois par f à partir de l'ensemble E.



Page d'accueil
Page de garde
Page 26 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

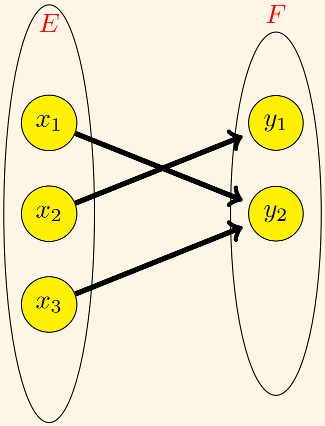
On dit alors que :

DÉFINITION : f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède un ou plusieurs antécédent(s) dans E par f. C'est donc que tout y est atteint au moins une fois par f à partir de l'ensemble E.

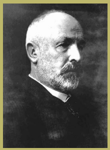
EXEMPLE :



y_1 possède un unique antécédent x_2

y_2 possède deux antécédents x_1 et x_3.

Donc f est surjective.



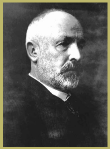
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

Donc f est non surjective ssi il existe au moins un élément y de F qui n'admet aucun antécédent par f dans E :

$$\exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad y \neq f(x)$$



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 28 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

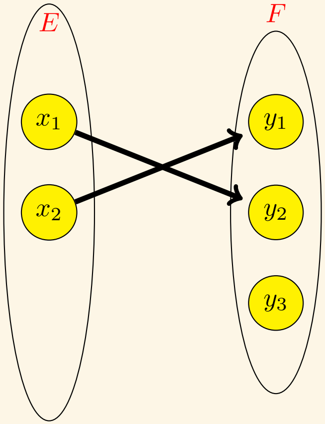
f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

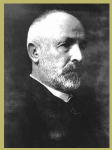
Donc f est non surjective ssi il existe au moins un élément y de F qui n'admet aucun antécédent par f dans E :

$$\exists y \in F, \quad \forall x \in E, \quad y \neq f(x)$$

EXEMPLE :



y_3 n'a aucun antécédent par f donc f est non surjective.



Page d'accueil
Page de garde
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

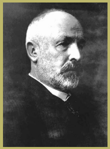
4. Bijection

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

DÉFINITION : f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective.

Remarque : c'est à dire que tout $y \in F$ possède exactement un et un seul antécédent par f dans E.

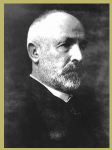


Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective.

f est non bijective ssi f est non injective ou non surjective.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 31 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

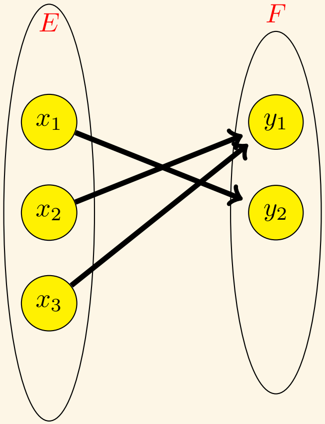
Supposons donnés deux ensembles E et F et une application f de E vers F.

On dit alors que :

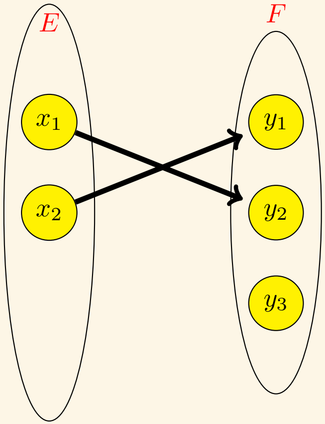
f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective.

f est non bijective ssi f est non injective ou non surjective.

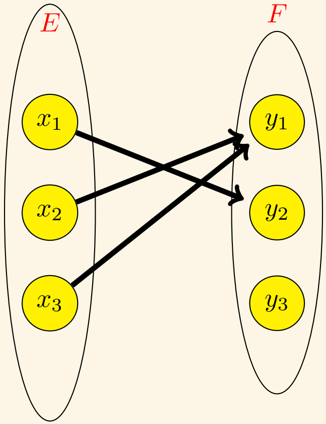
EXEMPLE :

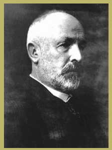


EXEMPLE :



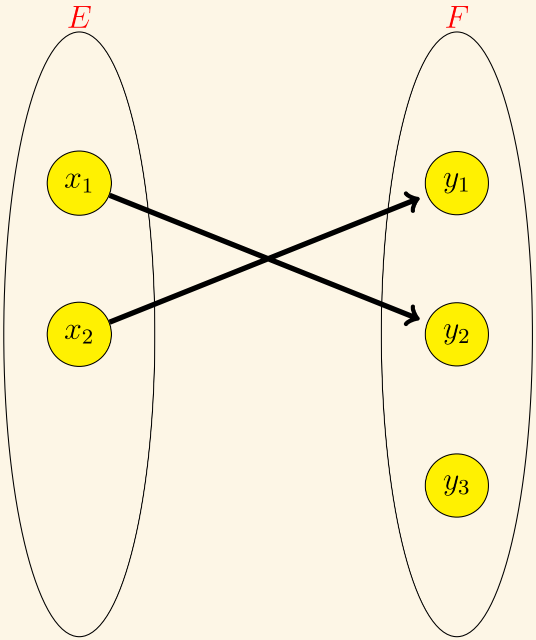
EXEMPLE :





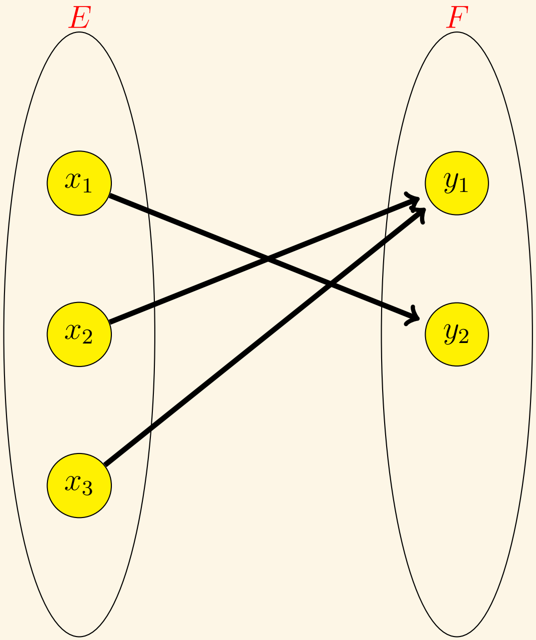
5. Énoncés des exercices

Exercice 1 :
L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?

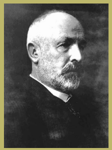


Solution de l'exercice 1

Exercice 2 :
L'application g définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 2

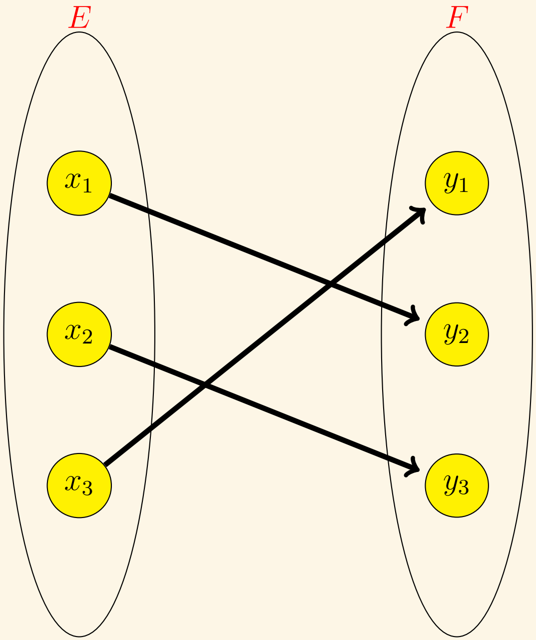


Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

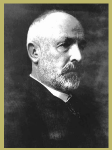
Page d'accueil
Page de garde
Page 34 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Exercice 3 :

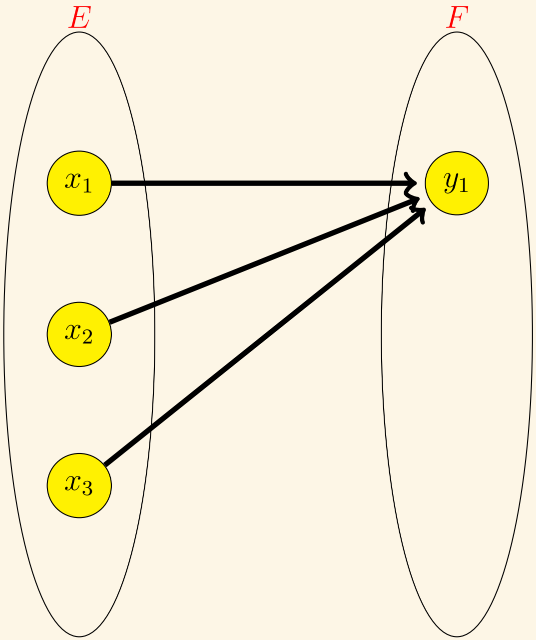
L'application h définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



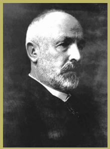
Solution de l'exercice 3



Exercice 4 :
L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



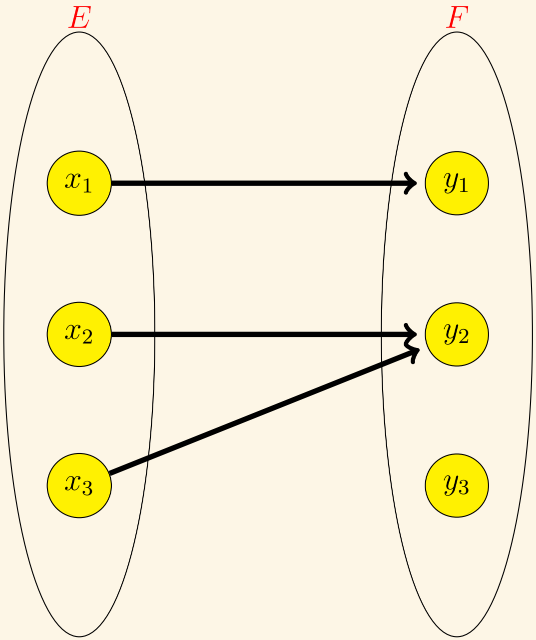
Solution de l'exercice 4



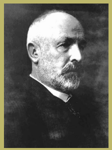
Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 36 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Exercice 5 :
L'application g définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 5



Application

Injection

Surjection

Bijection

Énoncés des exercices

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 37 / 49

Retour

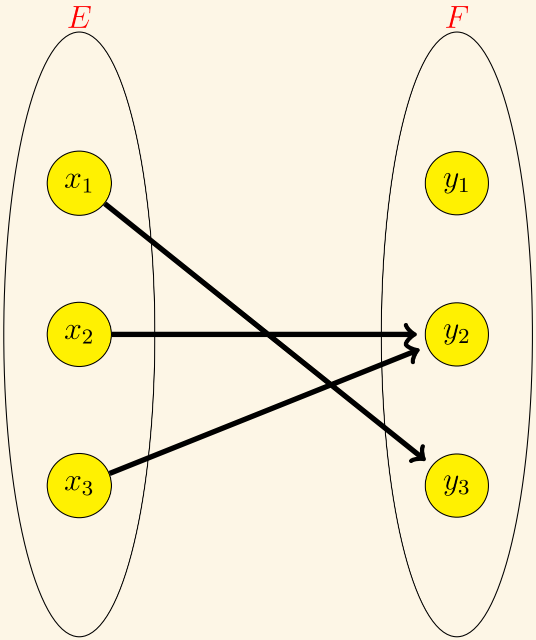
Plein écran

Fermer

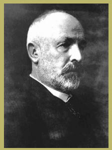
Quitter

Exercice 6 :

L'application h définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 6



Application

Injection

Surjection

Bijection

Énoncés des exercices

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 38 / 49

Retour

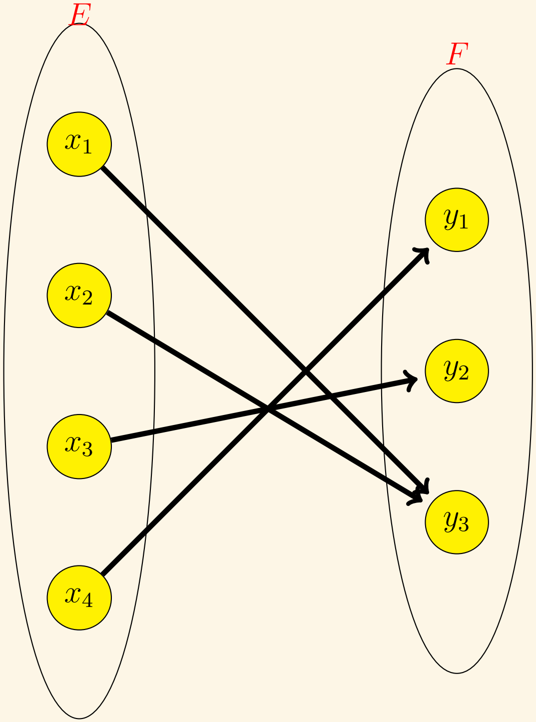
Plein écran

Fermer

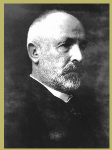
Quitter

Exercice 7 :

L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 7



Page d'accueil

Page de garde

Page 39 / 49

Retour

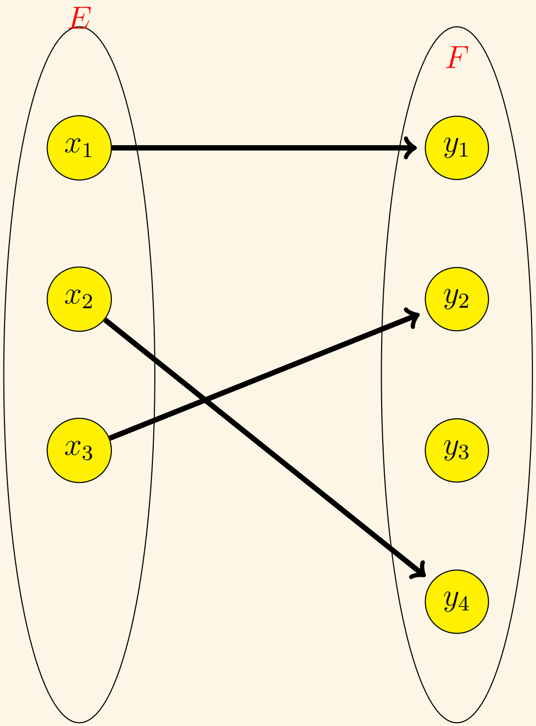
Plein écran

Fermer

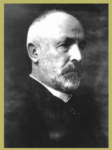
Quitter

Exercice 8 :

L'application g définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 8



Page d'accueil

Page de garde

Page 40 / 49

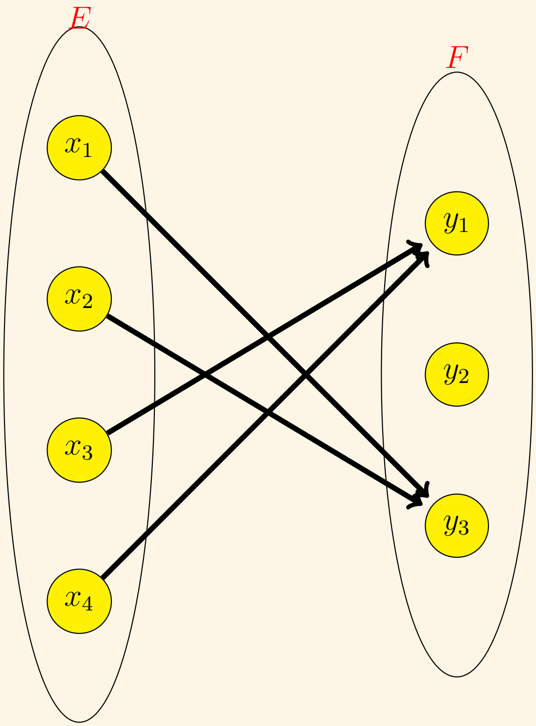
Retour

Plein écran

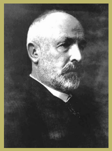
Fermer

Quitter

Exercice 9 :
L'application h définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 9



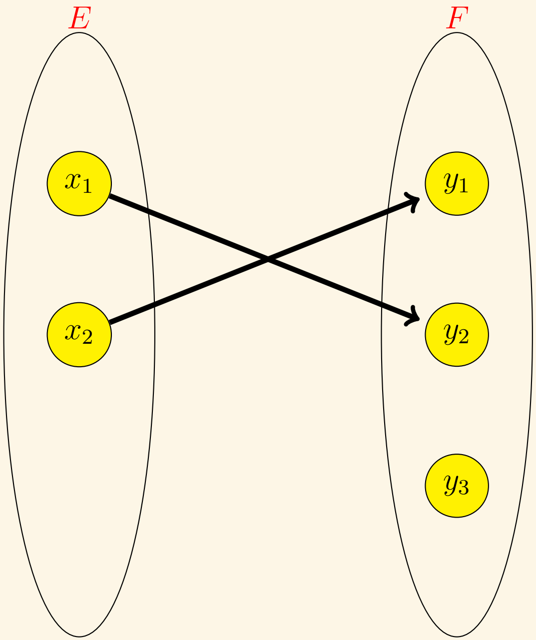
6. Solutions

Solution exercice 1 :

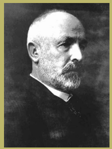
f est injective : deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes.

f n'est pas surjective puisque y_3 n'a pas d'antécédent.

f n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.



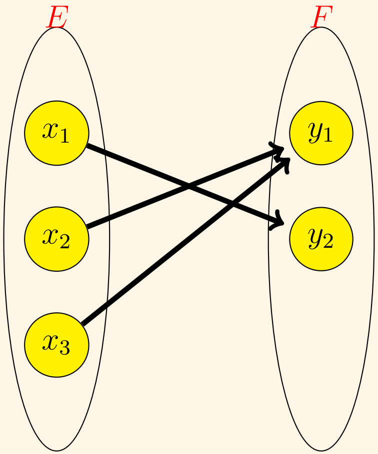
Page d'accueil
Page de garde
Page 42 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Solution exercice 2 :

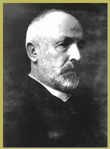
g n'est pas injective : il existe deux éléments distincts x_2 et x_3 qui ont la même image y_1.

g est surjective puisque tout élément $y \in F$ admet au moins un antécédent.

g n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.



Page d'accueil

Page de garde

Page 43 / 49

Retour

Plein écran

Fermer

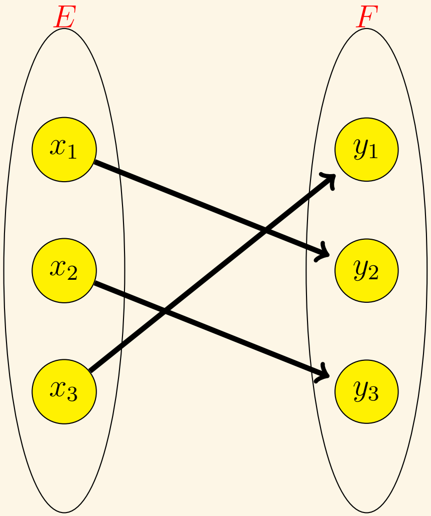
Quitter

Solution exercice 3 :

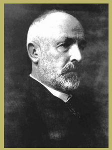
h est injective : deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes.

h est surjective puisque tout élément $y \in F$ admet au moins un antécédent.

h est donc bijective.



Retour vers l'énoncé.

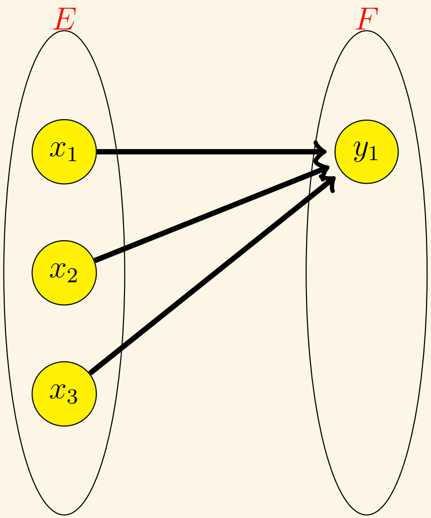


Solution exercice 4 :

f n'est pas injective : il existe deux éléments distincts x_1 et x_2 qui ont la même image y_1.

f est surjective puisque y_1 a au moins un antécédent.

f n'est donc pas bijective.



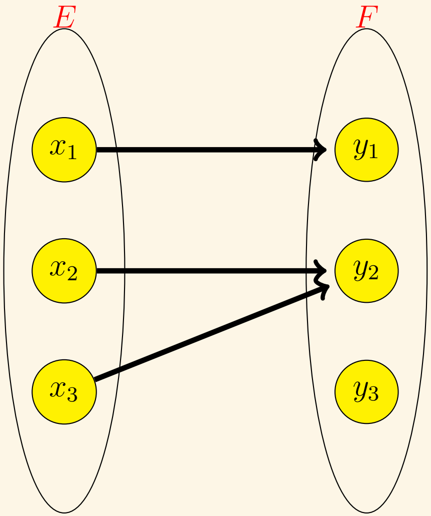
Retour vers l'énoncé.

Solution exercice 5 :

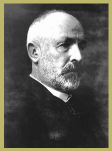
g n'est pas injective : il existe deux éléments distincts x_2 et x_3 qui ont la même image y_2.

g n'est pas surjective puisque l'élément $y_3 \in F$ n'a pas d'antécédent.

g n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.



Application

Injection

Surjection

Bijection

Énoncés des exercices

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 46 / 49

Retour

Plein écran

Fermer

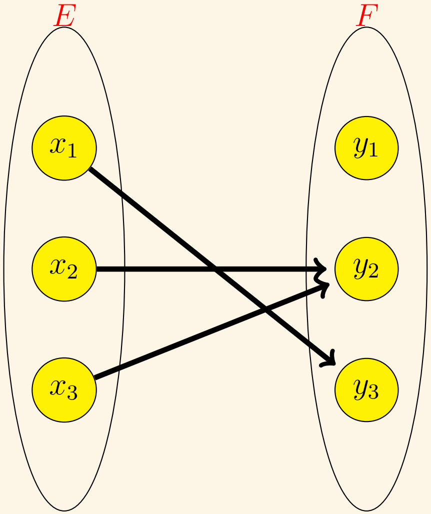
Quitter

Solution exercice 6 :

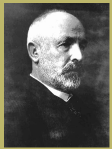
h n'est pas injective : il existe deux éléments distincts x_2 et x_3 qui ont la même image y_2.

h n'est pas surjective puisque l'élément $y_1 \in F$ n'a pas d'antécédent.

h n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.



Application

Injection

Surjection

Bijection

Énoncés des exercices

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 47 / 49

Retour

Plein écran

Fermer

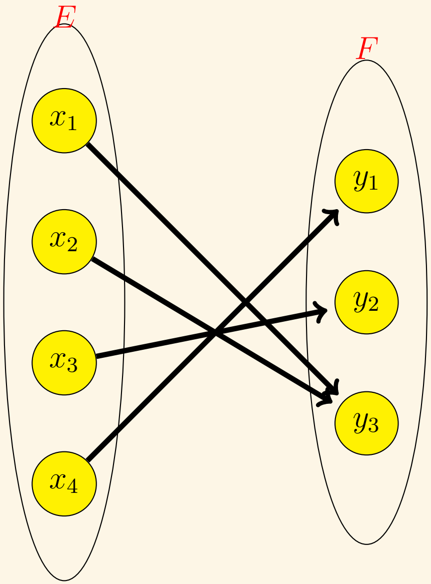
Quitter

Solution exercice 7 :

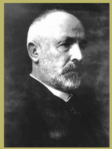
f n'est pas injective : il existe deux éléments distincts x_1 et x_2 qui ont la même image y_3.

f est surjective puisque tout élément $y \in F$ admet au moins un antécédent.

f n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

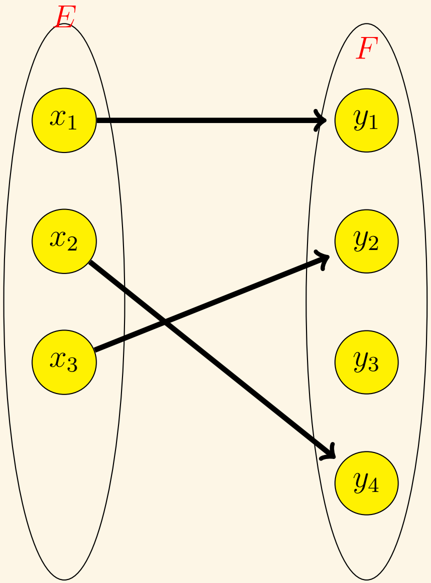
Page d'accueil
Page de garde
Page 48 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Solution exercice 8 :

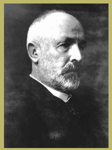
g est injective : deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes.

g n'est pas surjective puisque l'élément $y_3 \in F$ n'a pas d'antécédent.

g n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.



Application
Injection
Surjection
Bijection
Énoncés des exercices
Solutions

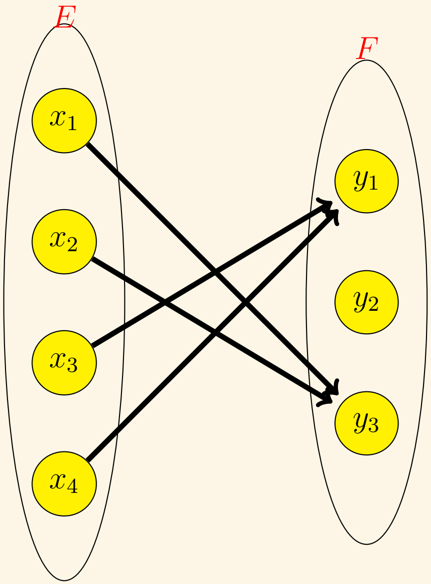
Page d'accueil
Page de garde
Page 49 / 49
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Solution exercice 9 :

h n'est pas injective : il existe deux éléments distincts x_3 et x_4 qui ont la même image y_1.

h n'est pas surjective puisque l'élément $y_2 \in F$ n'a pas d'antécédent.

h n'est donc pas bijective.



Retour vers l'énoncé.