le triangle de Pascal - le binôme de Newton

une introduction

J-P SPRIET

2015

Plan

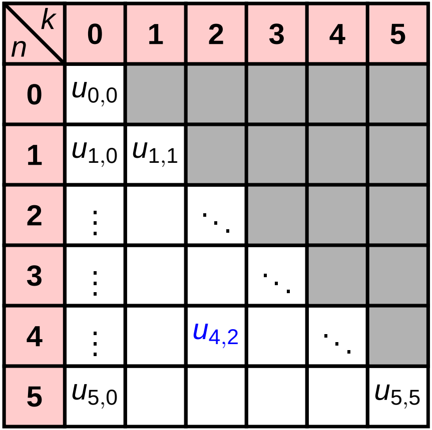
Voici un exposé présentant le triangle de Pascal et une application au binôme de Newton.

Plan

On va définir une suite double d’entiers que l’on peut ranger dans un tableau

On va définir une suite double d’entiers que l’on peut ranger dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0 comme sur ce dessin :

On va définir une suite double d’entiers que l’on peut ranger dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0 comme sur ce dessin :



k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$u_{0,0}$					
1	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$			$\ddots$		
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	
5	$u_{5,0}$					$u_{5,5}$

On va définir une suite double d'entiers que l'on peut ranger dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0 comme sur ce dessin :

$n \backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$u_{0,0}$	▨	▨	▨	▨	▨
1	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$	▨	▨	▨	▨
2	$\vdots$		$\ddots$	▨	▨	▨
3	$\vdots$			$\ddots$	▨	▨
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	▨
5	$u_{5,0}$					$u_{5,5}$

$u_{n,k}$ est le terme situé dans la case du tableau situé à la ligne n et à la colonne k

On va définir une suite double d'entiers que l'on peut ranger dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0 comme sur ce dessin :

$n \backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$u_{0,0}$	▨	▨	▨	▨	▨
1	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$	▨	▨	▨	▨
2	$\vdots$		$\ddots$	▨	▨	▨
3	$\vdots$			$\ddots$	▨	▨
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	▨
5	$u_{5,0}$					$u_{5,5}$

$u_{n,k}$ est le terme situé dans la case du tableau situé à la ligne n et à la colonne k. $u_{n,k}$ n'est défini que si $0 \leq k \leq n$.

La suite u des termes $u_{n,k}$ est construite de la façon suivante :

La suite u des termes $u_{n,k}$ est construite de la façon suivante :
$u_{n,0} = 1$ pour tout $n \geq 0$:

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	$u_{1,1}$				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$			$\ddots$		
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	
5	1					$u_{5,5}$

La suite u des termes $u_{n,k}$ est construite de la façon suivante :
$u_{n,0} = 1$ pour tout $n \geq 0$:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	$u_{1,1}$				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$			$\ddots$		
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	
5	1					$u_{5,5}$

Autrement dit, la première colonne correspondant à $k = 0$ n'est composée que de 1.

Puis on poursuit la construction des termes $u_{n,k}$ de la façon suivante :

Puis on poursuit la construction des termes $u_{n,k}$ de la façon suivante : $u_{n,n} = 1$ pour tout $n \geq 0$:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	▨	▨	▨	▨	▨
1	1	1	▨	▨	▨	▨
2	$\vdots$		$\ddots$	▨	▨	▨
3	$\vdots$			$\ddots$	▨	▨
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	▨
5	1					1

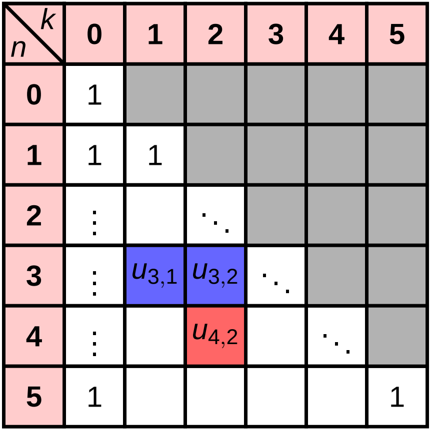
Puis on poursuit la construction des termes $u_{n,k}$ de la façon suivante : $u_{n,n} = 1$ pour tout $n \geq 0$:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	▨	▨	▨	▨	▨
1	1	1	▨	▨	▨	▨
2	$\vdots$		$\ddots$	▨	▨	▨
3	$\vdots$			$\ddots$	▨	▨
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	▨
5	1					1

Autrement dit, la première diagonale n'est composée que de 1.

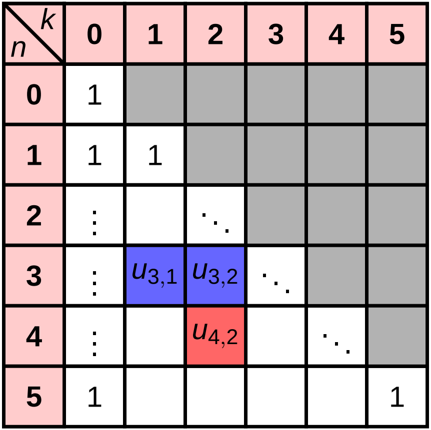
Puis on poursuit la construction des termes situés à l’intérieur du triangle :

Puis on poursuit la construction des termes situés à l'intérieur du triangle : $u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$



k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$\ddots$		
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	
5	1					1

Puis on poursuit la construction des termes situés à l'intérieur du triangle : $u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$



n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	⋮		⋱			
3	⋮	$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	⋱		
4	⋮		$u_{4,2}$		⋱	
5	1					1

Autrement dit, la somme des deux termes des cases bleues donne le terme de la case rouge

Les trois règles précédentes permettent de remplir ligne après ligne le tableau :

Les trois règles précédentes permettent de remplir ligne après ligne le tableau :
les deux premières règles :
$u_{n,0} = 1$ pour tout $n \geq 0$
$u_{n,n} = 1$ pour tout $n \geq 0$

Les trois règles précédentes permettent de remplir ligne après ligne le tableau :
les deux premières règles :
$u_{n,0} = 1$ pour tout $n \geq 0$
$u_{n,n} = 1$ pour tout $n \geq 0$

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1		1			
3	1			1		
4	1				1	
5	1					1

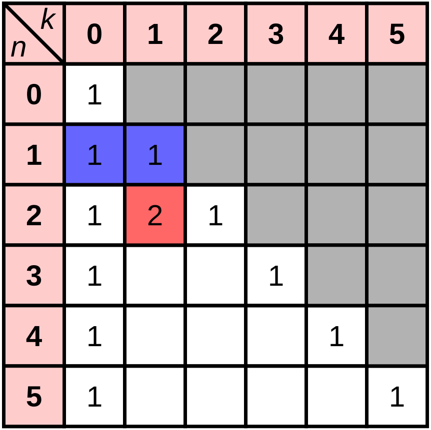
Les trois règles permettent de remplir ligne après ligne le tableau :

Les trois règles permettent de remplir ligne après ligne le tableau :
la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$

Les trois règles permettent de remplir ligne après ligne le tableau :

la troisième règle :

$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$



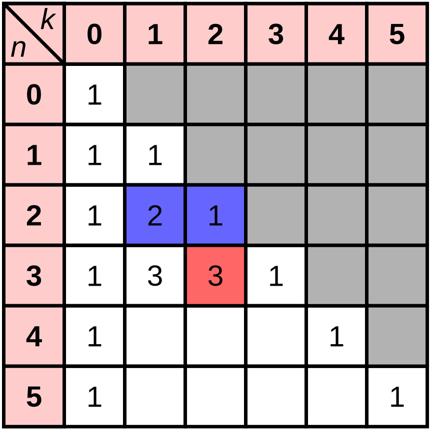
n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1			1		
4	1				1	
5	1					1

permet de remplir la ligne correspondant à $n = 2$

la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
permet de remplir la ligne correspondant à $n = 3$:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3		1		
4	1				1	
5	1					1

la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
permet de remplir la ligne correspondant à $n = 3$:



k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1				1	
5	1					1

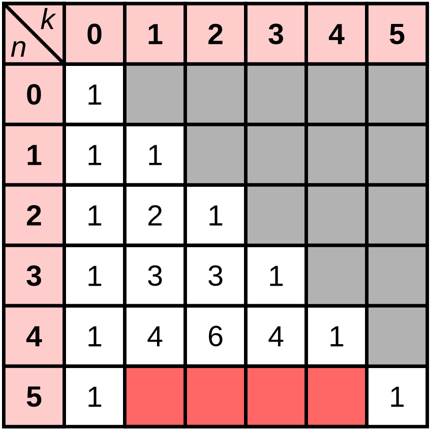
la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
permet de remplir la ligne correspondant à $n = 4$:

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1	▨	▨	▨	▨	▨
1	1	1	▨	▨	▨	▨
2	1	2	1	▨	▨	▨
3	1	3	3	1	▨	▨
4	1	🟥	🟥	🟥	1	▨
5	1					1

la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
permet de remplir la ligne correspondant à $n = 4$:

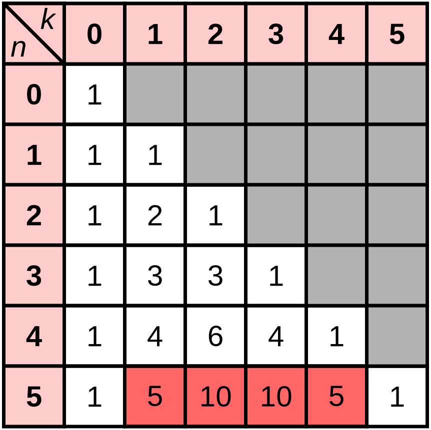
k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1					1

la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
permet de remplir la ligne correspondant à $n = 5$:



k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1					1

la troisième règle :
$u_{n,k} + u_{n,k+1} = u_{n+1,k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
permet de remplir la ligne correspondant à $n = 5$:



k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

et ainsi de suite...

Quelles propriétés semble avoir ce triangle ?

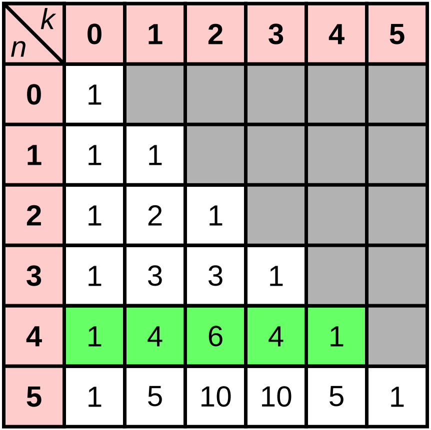
k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Quelles propriétés semble avoir ce triangle ?

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

il n'est composé que d'entiers naturels : $\forall (k, n) \in \mathbb{N}$ on a $u_{n,k} \in \mathbb{N}$.

Chaque ligne est un palindrome : elle se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche.



$n \backslash k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Chaque ligne est un palindrome : elle se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche.

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Comment écrire cette relation ?

Chaque ligne est un palindrome : elle se lit aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche.

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\text{pour tout } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n, \;\; u_{n,k} = u_{n,n-k}.$$

Il y a bien d'autres propriétés : la somme des termes formant la ligne n est égale à 2^n :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{n,k} = 2^n$$

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On voudrait maintenant trouver l'expression générale de ces termes $\binom{n}{k}$ sans avoir besoin de les construire ligne après ligne.

On voudrait maintenant trouver l'expression générale de ces termes $\binom{n}{k}$ sans avoir besoin de les construire ligne après ligne.

pour cela on va faire une digression sur les factorielles...

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! =$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

par exemple : $3! =$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

par exemple : $3! = 6$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

par exemple : $3! = 6$

par exemple : $4! =$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

par exemple : $3! = 6$

par exemple : $4! = 24$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

par exemple : $3! = 6$

par exemple : $4! = 24$

on remarque que $4! = 4 \times 3!$

Rappel : pour $n \geq 1$, on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

On lit ce nombre "factorielle n"

par exemple : $1! = 1$

par exemple : $3! = 6$

par exemple : $4! = 24$

on remarque que $4! = 4 \times 3!$ et de façon générale
$n! = n \times (n-1)!$ pour tout $n \geq 2$

Par nécessité on impose que $0! = 1$.

Ainsi, $n!$ peut se définir par récurrence :

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! & \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

Par nécessité on impose que $0! = 1$.

Ainsi, $n!$ peut se définir par récurrence :

$$\begin{cases} 0! = 1 & \\ n! = n \times (n-1)! & \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi puisque $1! = 1$ on a bien pour $n = 1$ la relation $n! = n \times (n-1)!$.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! & \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! & \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

On définit alors les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

On définit alors les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!\,(3-2)!} = \dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6}{2 \times 1} = 3$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1)! \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

On définit alors les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{2!\,(3-2)!} = \dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6}{2 \times 1} = 3$

par exemple $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\,(5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{120}{6 \times 2} = 10$

On peut alors calculer les $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$			$\ddots$		
4	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{4}$	

On peut alors calculer les $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

Il y a une forte ressemblance avec les termes de la suite $(u_{n,k})$...
on va montrer que ce sont en fait deux suites qui prennent les mêmes valeurs... et on aura donc trouvé la formule générale que l'on cherchait...

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} =$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} =$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$

par exemple $\binom{n}{n} =$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$

par exemple $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} =$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$

par exemple $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \times 0!} =$

On a défini les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

par exemple $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \times n!} = 1$

par exemple $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \times 0!} = \dfrac{n!}{n! \times 1} = 1$

On définit les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

On a montré que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$

On définit les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

On a montré que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
On montre alors que l'on a la relation :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ pour tout } n \text{ et } k \text{ tels que } 0 \leq k < n$$

On définit les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

On a montré que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
On montre alors que l'on a la relation :

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$

démontrer cette relation !

On définit les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

On a montré que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
On montre alors que l'on a la relation :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ pour tout } n \text{ et } k \text{ tels que } 0 \leq k < n$$

démontrer cette relation !
Ce qui justifie que la suite des $\binom{n}{k}$ suit exactement le même procédé de construction que la suite $(u_{n,k})$.

On définit les termes $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$

On a montré que $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
On montre alors que l'on a la relation :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \text{ pour tout } n \text{ et } k \text{ tels que } 0 \leq k < n$$

démontrer cette relation !
Ce qui justifie que la suite des $\binom{n}{k}$ suit exactement le même procédé de construction que la suite $(u_{n,k})$.
Et donc pour tout $n \geq 0$ et k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on a

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ainsi, plutôt que de noter $u_{n,k}$ on préfère noter les termes $\binom{n}{k}$

Ainsi, plutôt que de noter $u_{n,k}$ on préfère noter les termes $\binom{n}{k}$ que l'on "lit" : k parmi n

Ainsi, plutôt que de noter $u_{n,k}$ on préfère noter les termes $\binom{n}{k}$ que l'on "lit" : k parmi n

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$u_{0,0}$					
1	$u_{1,0}$	$u_{1,1}$				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$			$\ddots$		
4	$\vdots$		$u_{4,2}$		$\ddots$	
5	$u_{5,0}$					$u_{5,5}$

devient avec ces nouvelles notations :

Plutôt que de noter $u_{n,k}$ on préfère noter les termes $\binom{n}{k}$

k n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	$\binom{0}{0}$					
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2	$\vdots$		$\ddots$			
3	$\vdots$			$\ddots$		
4	$\vdots$		$\binom{4}{2}$		$\ddots$	
5	$\binom{5}{0}$					$\binom{5}{5}$

On a les trois règles de construction par récurrence du triangle :

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$

On a les trois règles de construction par récurrence du triangle :

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la première colonne

On a les trois règles de construction par récurrence du triangle :

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la première colonne
- $\binom{n}{n} = 1$ pour tout $n \geq 0$

On a les trois règles de construction par récurrence du triangle :

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la première colonne
- $\binom{n}{n} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la diagonale

On a les trois règles de construction par récurrence du triangle :

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la première colonne
- $\binom{n}{n} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la diagonale
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$

relation appelée formule de Pascal

On a les trois règles de construction par récurrence du triangle :

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la première colonne
- $\binom{n}{n} = 1$ pour tout $n \geq 0$ pour remplir la diagonale
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pour tout n et k tels que $0 \leq k < n$
relation appelée formule de Pascal
pour remplir l'intérieur

Plan

1. Le triangle de Pascal
2. Le binôme de Newton
   - définition
   - démonstrations

On appelle formule du Binôme de Newton la relation exprimant le développement de l'identité remarquable $(a+b)^n$ lorsque a et b sont deux nombres réels

On appelle formule du Binôme de Newton la relation exprimant le développement de l'identité remarquable $(a+b)^n$ lorsque a et b sont deux nombres réels (ou plus généralement deux nombres complexes).

On appelle formule du Binôme de Newton la relation exprimant le développement de l'identité remarquable $(a+b)^n$ lorsque a et b sont deux nombres réels (ou plus généralement deux nombres complexes).

Par exemple

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On appelle formule du Binôme de Newton la relation exprimant le développement de l'identité remarquable $(a+b)^n$ lorsque a et b sont deux nombres réels (ou plus généralement deux nombres complexes).

Par exemple

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 =$$

On appelle formule du Binôme de Newton la relation exprimant le développement de l'identité remarquable $(a+b)^n$ lorsque a et b sont deux nombres réels (ou plus généralement deux nombres complexes).

Par exemple

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 =$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 =$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Quelles sont les propriétés remarquables de ces développements ?

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 =$$

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a+b)^4 &=\end{aligned}$$

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on remarque que :

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on remarque que :

- Il y a une somme de termes en $a^k b^\ell$ avec $k + \ell =$

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on remarque que :

- Il y a une somme de termes en $a^k b^\ell$ avec $k + \ell = n$.

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on remarque que :

- Il y a une somme de termes en $a^k b^\ell$ avec $k + \ell = n$. donc en $a^k b^{n-k}$.

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on remarque que :

- Il y a une somme de termes en $a^k b^\ell$ avec $k+\ell=n$. donc en $a^k b^{n-k}$.
- Cette somme commence toujours par a^n et se finit par b^n .

Dans le développement de $(a+b)^n$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

on remarque que :

- Il y a une somme de termes en $a^k b^\ell$ avec $k + \ell = n$. donc en $a^k b^{n-k}$.
- Cette somme commence toujours par a^n et se finit par b^n .
- Il y a un nombre entier devant chaque terme $a^k b^{n-k}$:

pour $n = 2$ ces entiers sont 1 / 2 / 1
pour $n = 3$ ces entiers sont 1 / 3 / 3 / 1
pour $n = 4$ ces entiers sont 1 / 4 / 6 / 4 / 1
Ces entiers ressemblent étrangement à ceux du triangle de Pascal.

On va donc démontrer la formule dite du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

On va donc démontrer la formule dite du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

cette formule semble vraie pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$. On peut observer qu'elle est aussi vraie avant : pour $n = 1$ et $n = 0$.

La relation

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

peut se démontrer :

- par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

- par récurrence

- par un raisonnement ensembliste et de dénombrement

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

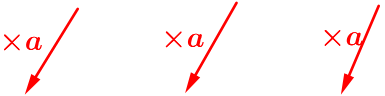
Passer de $(a+b)^2$ à $(a+b)^3$ c'est d'abord développer a

$$\begin{tikzcd}
(a+b)^2 = & a^2 \arrow[d, "\times a"'] & +\,2ab \arrow[d, "\times a"'] & +\,b^2 \arrow[d, "\times a"'] \\
(a+b)^3 = (\textcolor{red}{a}+b)(a+b)^2 = & a^3 & +\,2a^2b & +\,ab^2
\end{tikzcd}$$

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

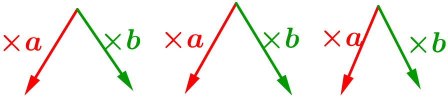
Passer de $(a+b)^2$ à $(a+b)^3$ c'est d'abord développer a, puis b

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a+b)^3 = ({\color{red}a}+b)(a+b)^2 = a^3 + 2a^2b + ab^2$$

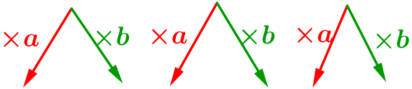
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a+b)^3 = ({\color{red}a}+{\color{green}b})(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

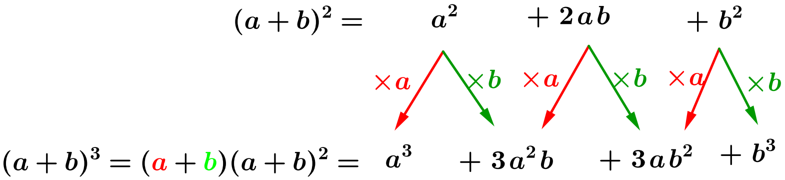
Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

$$(a+b)^2 = \quad a^2 \quad + 2ab \quad + b^2$$



$$(a+b)^3 = ({\color{red}a} + {\color{green}b})(a+b)^2 = \quad a^3 \quad + 3a^2b \quad + 3ab^2 \quad + b^3$$

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

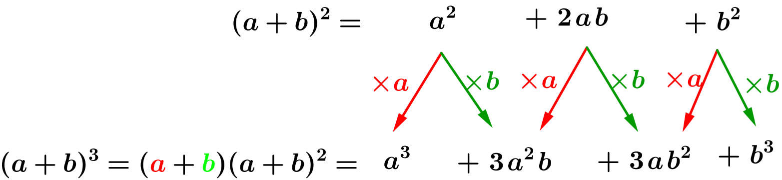


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

On voit donc qu’il n’y a qu’un seul terme en a^3 avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^3.

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

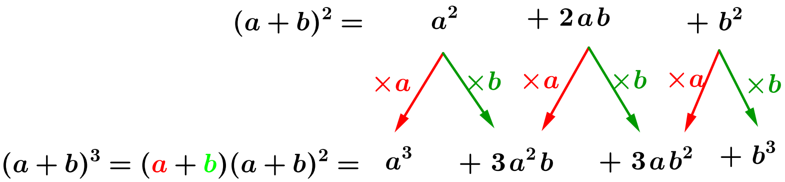
On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^3 avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^3.
les autres termes sont de la forme $a^k\, b^{3-k}$ avec comme coefficient entier la somme de deux coefficients de la ligne précédente.

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

$$\begin{tikzcd}
(a+b)^2 = & & a^2 \arrow[dl, red, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & & +\,2ab \arrow[dl, red, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & & +\,b^2 \arrow[dl, red, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & \\
(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = & a^3 & & +\,3a^2b & & +\,3ab^2 & & +\,b^3
\end{tikzcd}$$

On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^3 avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^3.
les autres termes sont de la forme $a^k\, b^{3-k}$ avec comme coefficient entier la somme de deux coefficients de la ligne précédente.
Les coefficients suivent donc la règle du triangle de Pascal,

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

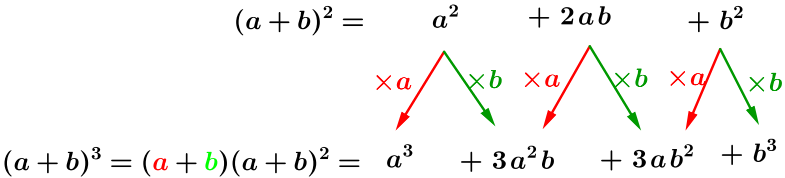
On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^3 avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^3.
les autres termes sont de la forme $a^k\, b^{3-k}$ avec comme coefficient entier la somme de deux coefficients de la ligne précédente.
Les coefficients suivent donc la règle du triangle de Pascal, et donc ils sont égaux à $u_{3,k} = \binom{3}{k}$

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

$$\begin{tikzcd}
(a+b)^2 = & & a^2 \arrow[dl, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & & +\,2\,a\,b \arrow[dl, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & & +\,b^2 \arrow[dl, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & \\
(a+b)^3 = (\textcolor{red}{a}+\textcolor{green}{b})(a+b)^2 = & a^3 & & +\,3\,a^2\,b & & +\,3\,a\,b^2 & & +\,b^3
\end{tikzcd}$$

On peut généraliser aisément :
On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^n avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^n.

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

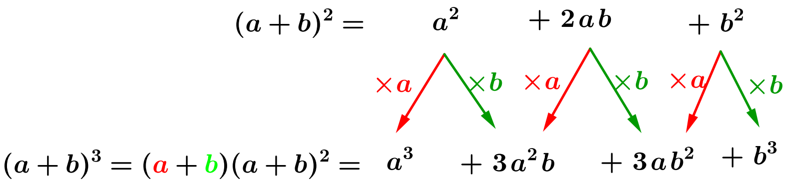


$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = ({\color{red}a} + {\color{green}b})(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

On peut généraliser aisément :
On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^n avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^n.
les autres termes sont de la forme $a^k\, b^{n-k}$ avec comme coefficient entier la somme de deux coefficients de la ligne précédente.

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

On peut généraliser aisément :
On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^n avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^n.
les autres termes sont de la forme $a^k\, b^{n-k}$ avec comme coefficient entier la somme de deux coefficients de la ligne précédente.
Les coefficients suivent donc la règle du triangle de Pascal,

Démonstration par un raisonnement prouvant une relation de récurrence

$$\begin{tikzcd}
(a+b)^2 = & & a^2 \arrow[dl, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & & +\,2ab \arrow[dl, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & & +\,b^2 \arrow[dl, "\times a"'] \arrow[dr, "\times b"] & \\
(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = & a^3 & & +\,3a^2b & & +\,3ab^2 & & +\,b^3
\end{tikzcd}$$

On peut généraliser aisément :
On voit donc qu'il n'y a qu'un seul terme en a^n avec comme coefficient entier 1 devant. Idem pour b^n.
les autres termes sont de la forme $a^k\, b^{n-k}$ avec comme coefficient entier la somme de deux coefficients de la ligne précédente.
Les coefficients suivent donc la règle du triangle de Pascal, et donc ils sont égaux à $u_{n,k} = \binom{n}{k}$

Démonstration par récurrence

Soient a et b deux réels (ou deux complexes) fixés. Montrons par récurrence la formule du binôme de Newton :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Notons P_n la propriété : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

- Initialisation : la propriété P_n est vraie au rang $n = 0$ car $(a+b)^0 = 1$ et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

- Hérédité

Supposons la propriété P_n vraie pour un entier n et montrons alors qu'elle est vraie au rang $n+1$. C'est à dire supposons que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ et montrons alors que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

On a $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Alors en développant, on obtient que

$$S = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) =$$

$$a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right)$$

par développement du produit

Donc $S = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}\right)$ par développement de a dans la première somme et de b dans la seconde

On pose alors, dans la première somme, le changement de variable $i = k+1$, soit encore $k = i-1$ et on a :

$$S = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n+1-k}\right)$$

On pose alors, dans la première somme, le changement de variable $i = k + 1$, soit encore $k = i - 1$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} = \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^{i}b^{n-(i-1)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^{i}b^{n+1-i}$$

Ainsi, on a donc d'après le calcul précédent :

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right)$$

Puis $S = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} \right) + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \right) +$

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \right)$$

on isole les termes qui ne sont pas commun

$$S = \left(\sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \tbinom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 +$$

$$\binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

par regroupement des deux sommes

$$S = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\tbinom{n}{k-1} + \tbinom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \right) + a^{n+1} + b^{n+1}$$

par factorisation dans la somme

$$S = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k}\right)+a^{n+1}+b^{n+1}$$

Mais alors on reconnaît la formule de Pascal :

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$$

de sorte que $$S = \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}\right)+a^{n+1}+b^{n+1}$$

$$S = \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + a^{n+1} + b^{n+1}$$

Il ne reste plus qu'à voir que $a^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}$ et $b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-(0)}$
pour voir que les termes isolés a^{n+1} et b^{n+1} peuvent être intégrés dans la somme pour les indices $k = n+1$ et $k = 0$ respectivement :

D'où $S = (a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Et P_{n+1} est vraie.

La propriété P_n est donc héréditaire.

- Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang 0 et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration par un raisonnement ensembliste et de dénombrement

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)\times(a+b)\times\cdots\times(a+b)\times(a+b)}^{n\text{ fois}}$$

il s'agit donc de prendre dans chacune des n parenthèses un terme a ou b et de les multiplier entre eux.

On a donc une somme de 2^n termes, chacun est formé par des produits de n facteurs égaux à a ou à b.

On doit alors regrouper les termes ayant autant de a et de b ; on a donc des "anagrammes" de "mots" de la forme

$$\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{k\text{ fois}}\times\overbrace{b\times b\times\cdots\times b}^{n-k\text{ fois}}$$

Or les "anagrammes" de "mots" de la forme
$\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{k \text{ fois}}\times\overbrace{b\times b\times\cdots\times b}^{n-k \text{ fois}}$
sont au nombre de $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. C'est à dire le coefficient du triangle de Pascal $\binom{n}{k}$.

Or les "anagrammes" de "mots" de la forme
$\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{k \text{ fois}} \times \overbrace{b \times b \times \cdots \times b}^{n-k \text{ fois}}$
sont au nombre de $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. C'est à dire le coefficient du triangle de Pascal $\binom{n}{k}$.

Ainsi,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$