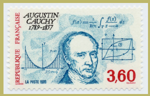


Énoncés

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 1 / 11

Retour

Plein écran

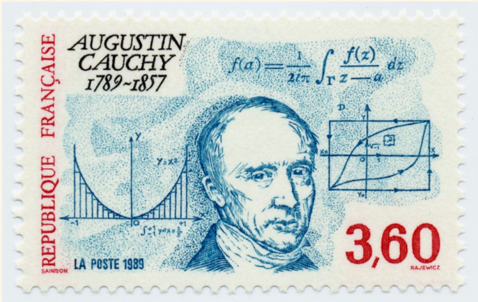
Fermer

Quitter

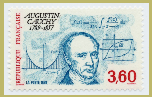
fonctions - bijections

J-P SPRIET

© JPS



Augustin Louis Cauchy (1789-1859)



Énoncés

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 2 / 11

Retour

Plein écran

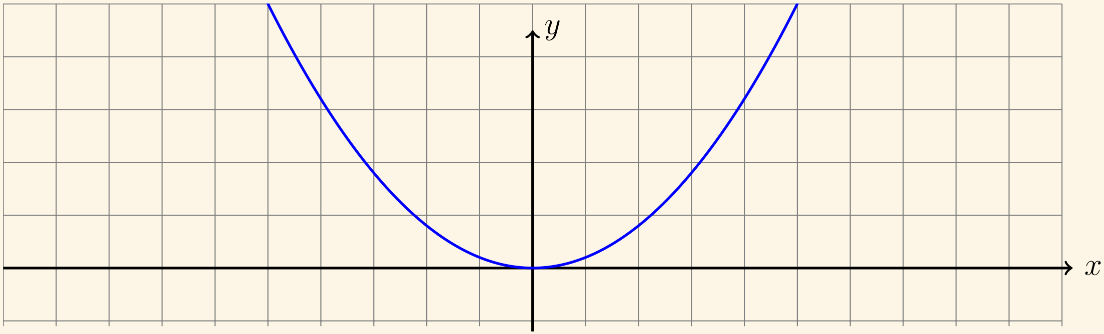
Fermer

Quitter

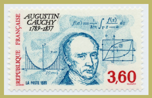
1. Énoncés

Exercice 1 :
L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$



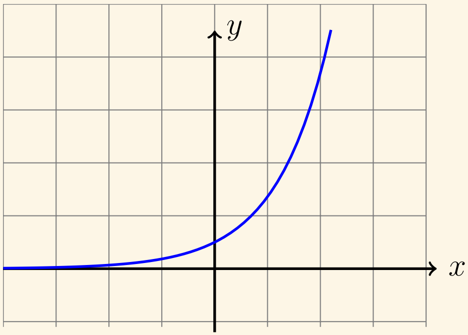
Solution de l'exercice 1



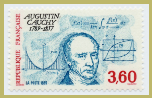
Énoncés
Solutions
Page d'accueil
Page de garde
Page 3 / 11
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Exercice 2 :
L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & e^x \end{array}$$



Solution de l'exercice 2



Énoncés

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 4 / 11

Retour

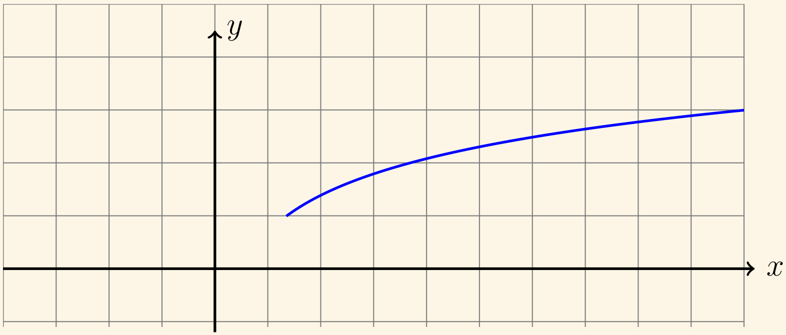
Plein écran

Fermer

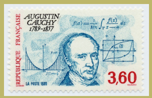
Quitter

Exercice 3 :
L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$\begin{array}{rccl} f & : & [e;+\infty[& \longrightarrow &]0;+\infty[\\ & & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$



Solution de l'exercice 3



Énoncés

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 5 / 11

Retour

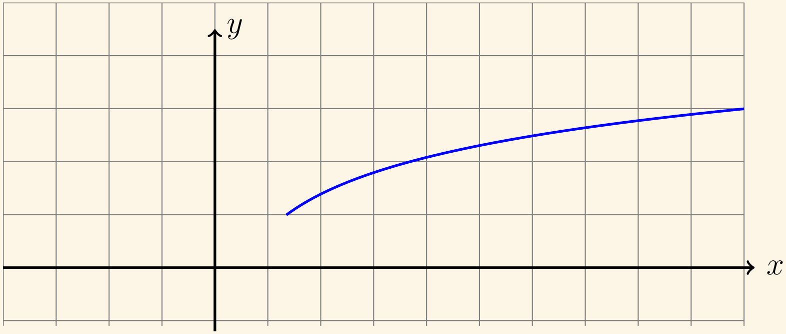
Plein écran

Fermer

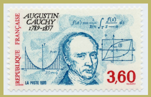
Quitter

Exercice 4 :
L'application f définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$\begin{array}{rccc} f : & [e;+\infty[& \to & [1;+\infty[\\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$



Solution de l'exercice 4

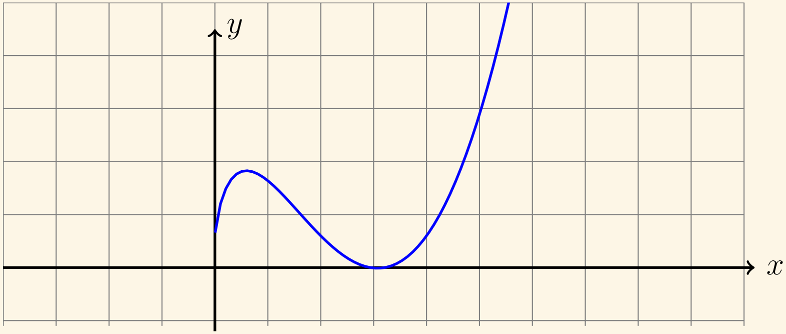


Énoncés
Solutions

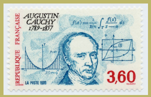
Page d'accueil
Page de garde
Page 6 / 11
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Exercice 5 :

Par LECTURE GRAPHIQUE, l'application $f \ : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par le graphe suivant est-elle injective ? surjective ? bijective ?



Solution de l'exercice 5



Énoncés
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 7 / 11
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

2. Solutions

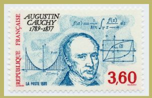
Solution exercice 1 :

f n'est pas injective : $x_1 = -3$ et $x_2 = 3$ sont deux éléments distincts qui ont la même image.

f n'est pas surjective puisque $y = -2$ n'a pas d'antécédent : il n'existe pas de réel x tel que $f(x) = x^2 = -2$.

f n'est donc pas bijective.

Retour vers l'énoncé.



Énoncés
Solutions
Page d'accueil
Page de garde
Page 8 / 11
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Solution exercice 2 :

f est injective : deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes :

$$\boxed{\text{si } (x_1; x_2) \in \mathbb{R} \text{ et } x_1 \neq x_2 \text{ alors } f(x_1) \neq f(x_2)}$$

ceci puisque $f = \exp$ est strictement croissante.
En effet, puisque $x_1 \neq x_2$, on a $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$.
Si $x_1 < x_2$, alors puisque $f = \exp$ est strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
Si $x_2 < x_1$, alors puisque $f = \exp$ est strictement croissante, on a $f(x_2) < f(x_1)$.
Et dans tous les cas $f(x_1) \neq f(x_2)$

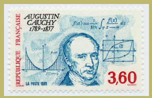
f est surjective puisque tout $y \in]0; +\infty[$ a au moins un antécédent.
En effet, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $f(x) = y$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Rightarrow \quad e^x = y \\ &\Rightarrow \quad x = \ln(y) \qquad \text{ce qui a un sens car } y > 0 \end{aligned}$$

Et $x \in \mathbb{R}$.

f est donc bijective, puisque injective et surjective.

Retour vers l'énoncé.



Énoncés

Solutions

Page d'accueil

Page de garde

Page 9 / 11

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

Solution exercice 3 :

f est injective : puisque $f = \ln$ est strictement croissante, deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes .
En effet, puisque $x_1 \neq x_2$, on a $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$.
Si $x_1 < x_2$, alors puisque $f = \ln$ est strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_2)$.
Si $x_2 < x_1$, alors puisque $f = \ln$ est strictement croissante, on a $f(x_2) < f(x_1)$.
Et dans tous les cas $f(x_1) \neq f(x_2)$

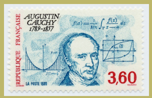
f n'est pas surjective puisqu'il existe un $y = 0,5 \in [0;+\infty[$ qui n'a pas d'antécédent.
En effet, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $f(x) = y$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Rightarrow \quad \ln(x) = y \\ &\Rightarrow \quad x = e^y \end{aligned}$$

Mais alors $x = e^{0,5} < e$ et donc n'appartient pas à l'intervalle de départ $[e;+\infty[$.

f est donc non bijective, puisque non surjective.

Retour vers l'énoncé.



Énoncés
Solutions

Page d'accueil
Page de garde
Page 10 / 11
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

Solution exercice 4 :

f est injective : puisque $f = \ln$ est strictement croissante, deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes .

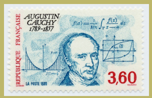
f est surjective :
En effet, si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $f(x) = y$ alors

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Rightarrow \ln(x) = y \\ &\Rightarrow x = e^y \end{aligned}$$

Mais alors $y \geq 1$ implique $x = e^y \geq e$, et donc x appartient à l'intervalle de départ $[e; +\infty[$.

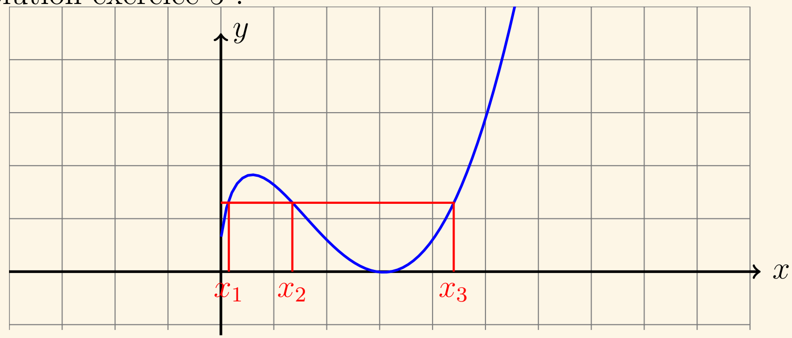
f est donc bijective, puisque injective et surjective.

Retour vers l'énoncé.



Énoncés
Solutions

Solution exercice 5 :



f est non injective : il existe des points distincts qui ont la même image (cf traits rouges).

f est surjective :

En effet, si $y \in \mathbb{R}^+$ alors y admet toujours au moins un antécédent.

f est donc non bijective, puisque non injective.

Retour vers l'énoncé.

Page d'accueil
Page de garde
Page 11 / 11
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter