théorie des ensembles

une introduction

J-P SPRIET

2013

Plan

Voici un exposé des bases de la théorie des ensembles.

1. Appartenance, inclusion
2. intersection
3. réunion
4. complémentaire
5. différence symétrique
6. exercices

Plan

1 Appartenance, inclusion
- appartenance
- inclusion

2 intersection

3 réunion

4 complémentaire

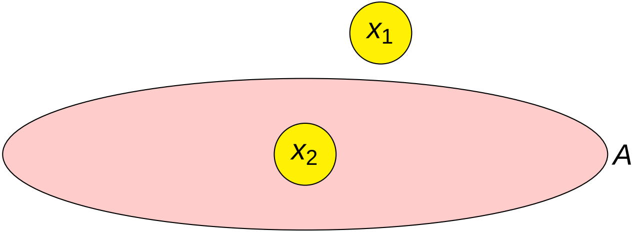
5 différence symétrique

6 exercices

Appartenance

Si A est un ensemble, on dit que x appartient à l'ensemble A ssi x est un élément de A, et on note $x \in A$. Dans le cas contraire on note $x \notin A$.

EXEMPLE : $x_1 \notin A$; $x_2 \in A$



Si A est un ensemble, on dit que x appartient à l'ensemble A ssi x est un élément de A, et on note $x \in A$. Dans le cas contraire on note $x \notin A$.

EXEMPLE :

$1 \in \mathbb{N}$; $-2 \notin \mathbb{N}$ mais $-2 \in \mathbb{Z}$

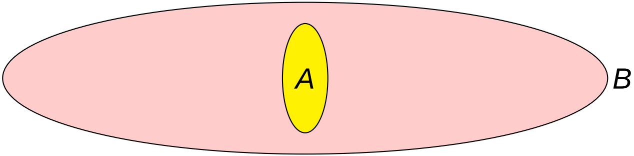
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (démontré par les grecs)

$\pi \notin \mathbb{Q}$ (démontré par)

Inclusion

Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B, ou que A est une sous-partie de B ssi tout élément de A est aussi élément de B. Et on note $A \subset B$.

EXEMPLE : $A \subset B$



Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B, ou que A est une sous-partie de B ssi tout élément de A est aussi élément de B. Et on note $A \subset B$.

EXEMPLE :

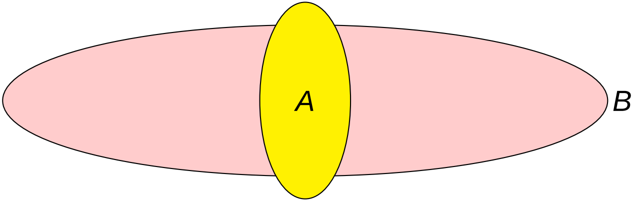
Tout entier naturel est aussi un entier relatif donc on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Tout entier naturel est aussi un nombre réel donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

On a la suite d'inclusions classiques : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B, ou que A est une sous-partie de B ssi tout élément de A est aussi élément de B. Et on note $A \subset B$.
Dans le cas contraire, il existe (au moins) un élément de A qui n'appartient pas à B. Et on note $A \not\subset B$, que l'on lit " A n'est pas inclus dans B ".

EXEMPLE : $A \not\subset B$



Si A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B, ou que A est une sous-partie de B ssi tout élément de A est aussi élément de B. Et on note $A \subset B$.
Dans le cas contraire, il existe (au moins) un élément de A qui n'appartient pas à B. Et on note $A \not\subset B$, que l'on lit " A n'est pas inclus dans B ".

EXEMPLE :

$\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$: tout entier relatif n'est pas forcément un entier naturel, par exemple $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$.

$[0; 1] \not\subset \mathbb{R}^*$: par exemple $0 \in [0; 1]$ mais $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Égalité de deux ensembles

Pour montrer que $A = B$, il faut et il suffit de montrer la double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$, ce qui équivaut à montrer que tout élément de A est élément de B et réciproquement que tout élément de B est élément de A.

EXEMPLE : Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

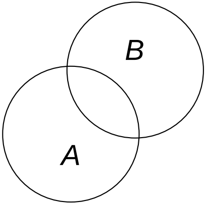
Plan

1. Appartenance, inclusion
2. intersection
3. réunion
4. complémentaire
5. différence symétrique
6. exercices

intersection de deux ensembles

On définit l'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à la fois à A et à B.

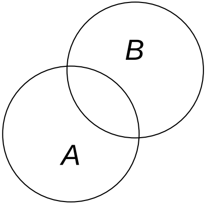
EXEMPLE :
On considère deux disques A et B :

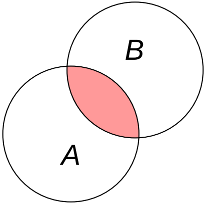


intersection de deux ensembles

On définit l'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à la fois à A et à B.

EXEMPLE :
On considère deux disques A et B :





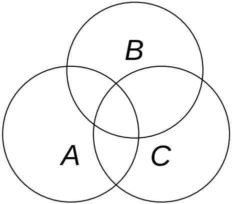
en rose : $A \cap B$

intersection d'ensembles

On généralise l'intersection à plus d'ensembles :
On définit l'intersection d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à chacun des ensembles A_i.

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE : On considère trois disques A, B et C :

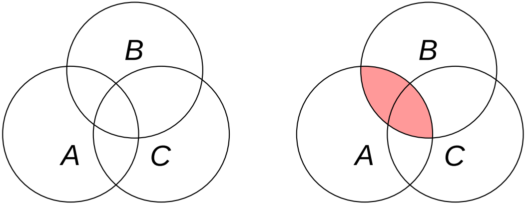


intersection d'ensembles

On généralise l'intersection à plus d'ensembles :
On définit l'intersection d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à chacun des ensembles A_i.

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE : On considère trois disques A, B et C :



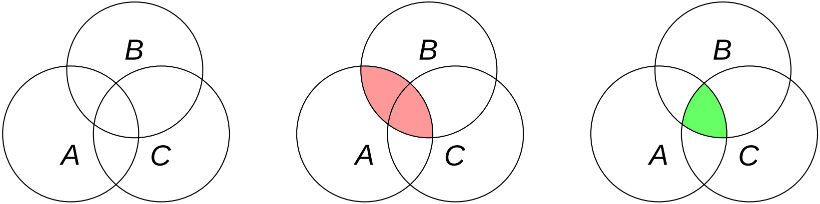
en rose : $A \cap B$

intersection d'ensembles

On généralise l'intersection à plus d'ensembles :
On définit l'intersection d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à chacun des ensembles A_i.

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE : On considère trois disques A, B et C :



en rose : $A \cap B$ et en vert $A \cap B \cap C$

intersection de deux ensembles

On définit l'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemples :

$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- =$ $[-1; 1] \cap [0; 3] =$

intersection de deux ensembles

On définit l'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemples :

$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ $[-1;1] \cap [0;3] =$

intersection de deux ensembles

On définit l'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à la fois à A et à B.

Exemples :

$\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$ $\qquad$ $[-1; 1] \cap [0; 3] = [0; 1]$

intersection d'ensembles

On généralise l'intersection à plus d'ensembles :
On définit l'intersection d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à chacun des ensembles A_i.

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{n};\frac{1}{n}\right] =$$

intersection d'ensembles

On généralise l'intersection à plus d'ensembles :
On définit l'intersection d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à chacun des ensembles A_i.

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{n};\frac{1}{n}\right] = \{0\}$$

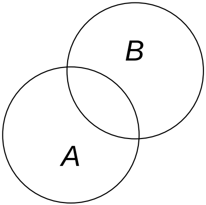
Plan

1. Appartenance, inclusion
2. intersection
3. réunion
4. complémentaire
5. différence symétrique
6. exercices

réunion de deux ensembles

On définit la réunion de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B, le ou n'étant pas exclusif.

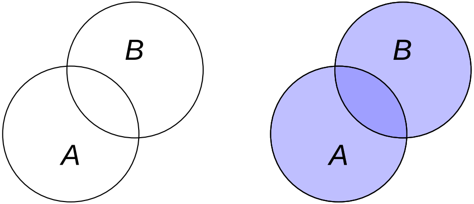
EXEMPLE :
On considère deux disques A et B :



réunion de deux ensembles

On définit la réunion de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B, le ou n'étant pas exclusif.

EXEMPLE :
On considère deux disques A et B :



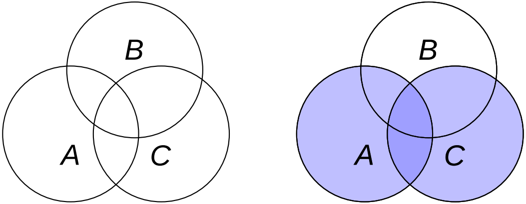
en bleu $A \cup B$

réunion d'ensembles

On généralise la réunion à plus d'ensembles :
On définit la réunion d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i.

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE : On considère trois disques A, B et C :



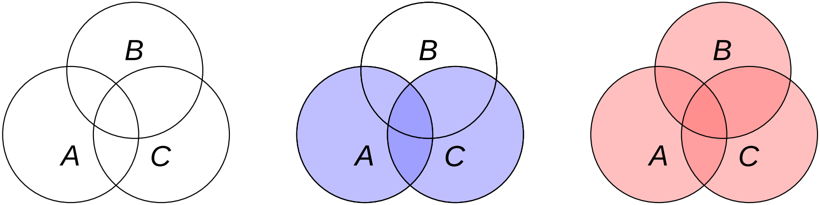
En bleu $A \cup C$

réunion d'ensembles

On généralise la réunion à plus d'ensembles :
On définit la réunion d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i.

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE : On considère trois disques A, B et C :



En bleu $A \cup C$; et en rose $A \cup B \cup C$

réunion de deux ensembles

On définit la réunion de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B, le ou n'étant pas exclusif.

EXEMPLES :

$[-1;2] \cup [0;5] =$

réunion de deux ensembles

On définit la réunion de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B, le ou n'étant pas exclusif.

EXEMPLES :

$[-1;2] \cup [0;5] = [-1;5]$

$[0;+\infty[\cup]-\infty;5] =$

réunion de deux ensembles

On définit la réunion de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B, le ou n'étant pas exclusif.

EXEMPLES :

$[-1;2] \cup [0;5] = [-1;5]$

$[0;+\infty[\cup]-\infty;5] = \mathbb{R}$

réunion d'ensembles

On généralise la réunion à plus d'ensembles :
On définit la réunion d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i.

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{-1}{n}; n\right] =$$

réunion d'ensembles

On généralise la réunion à plus d'ensembles :
On définit la réunion d'une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A_i.

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

EXEMPLE :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}*} \left[\frac{-1}{n}; n\right] = [-1; +\infty[$$

Plan

1 Appartenance, inclusion

2 intersection

3 réunion

4 complémentaire

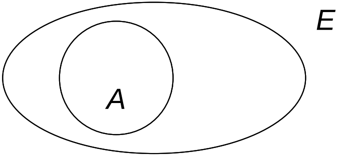
5 différence symétrique

6 exercices

complémentaire d'une partie

On définit le complémentaire d'une partie A d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui n'appartiennent pas à A.
On note le complémentaire $\complement_E A$ ou plus simplement $\complement A$ lorsque l'ensemble E est fixé au départ.

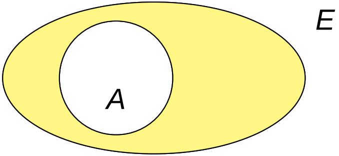
EXEMPLE : On considère un disque A inclus dans une ellipse E;



complémentaire d'une partie

On définit le complémentaire d'une partie A d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui n'appartiennent pas à A.
On note le complémentaire $\complement_E A$ ou plus simplement $\complement A$ lorsque l'ensemble E est fixé au départ.

EXEMPLE : On considère un disque A inclus dans une ellipse E ; la partie jaune est $\complement_E A$:



complémentaire d'une partie

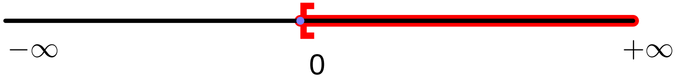
EXEMPLES :

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^+$ est : $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ =$

complémentaire d'une partie

EXEMPLES :

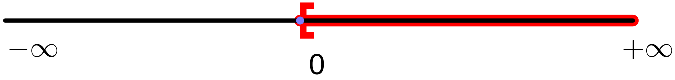
Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^+$ est : $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ =]-\infty; 0[$



complémentaire d'une partie

EXEMPLES :

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^+$ est : $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ =]-\infty; 0[$

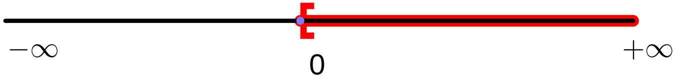


Le complémentaire dans $\mathbb{R}^+$ de $[1; 2]$ est :

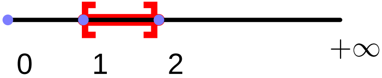
complémentaire d'une partie

EXEMPLES :

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^+$ est : $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^+ =]-\infty; 0[$



Le complémentaire dans $\mathbb{R}^+$ de $[1; 2]$ est : $[0; 1[\cup]2; +\infty[$



complémentaire d'une partie

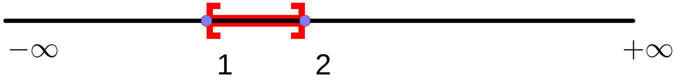
EXEMPLES :

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $[1; 2]$ est :

complémentaire d'une partie

EXEMPLES :

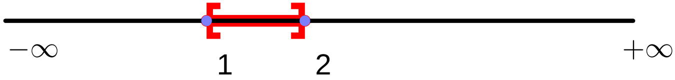
Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $[1; 2]$ est : $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$



complémentaire d'une partie

EXEMPLES :

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $[1;2]$ est : $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

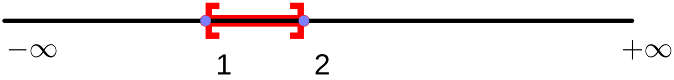


Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $]1;2]$ est :

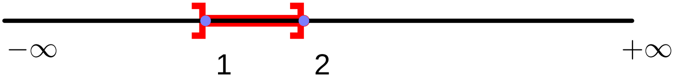
complémentaire d'une partie

EXEMPLES :

Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $[1;2]$ est : $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$



Le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $]1;2]$ est : $]-\infty;1]\cup]2;+\infty[$



Plan

1. Appartenance, inclusion
2. intersection
3. réunion
4. complémentaire
5. différence symétrique
6. exercices

différence symétrique de deux parties

On définit la différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B mais pas aux deux, le ou est donc exclusif. On la note $A \Delta B$.

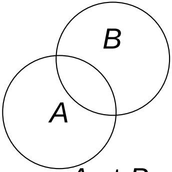
différence symétrique de deux parties

On définit la différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B mais pas aux deux, le ou est donc exclusif. On la note $A \Delta B$.

On a donc $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \complement_{A \cup B}(A \cap B)$.

différence symétrique de deux parties

On définit la différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B mais pas aux deux, le ou est donc exclusif. On la note $A \Delta B$.
On a donc $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \complement_{A \cup B}(A \cap B)$.

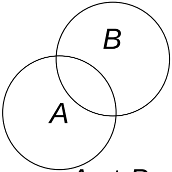


A et B

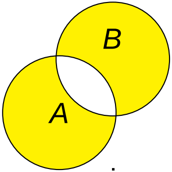
différence symétrique de deux parties

On définit la différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E comme l'ensemble des éléments $x \in E$ qui appartiennent à A ou à B mais pas aux deux, le ou est donc exclusif. On la note $A \Delta B$.

On a donc $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \complement_{A \cup B}(A \cap B)$.



A et B



en jaune : $A \Delta B$

EXEMPLES :

dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}^+ \Delta [-1;2] =$

EXEMPLES :

dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}^+ \Delta [-1;2] = [-1;0[\cup]2;+\infty[$.

dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R} \Delta \mathbb{R}^+ =$

EXEMPLES :

dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}^+ \Delta [-1;2] = [-1;0[\cup]2;+\infty[$.

dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R} \Delta \mathbb{R}^+ =]-\infty;0[$.

Plan

1 Appartenance, inclusion

2 intersection

3 réunion

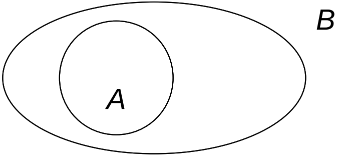
4 complémentaire

5 différence symétrique

6 exercices

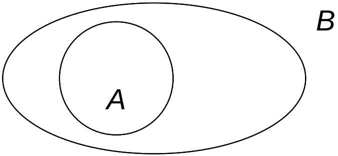
EXERCICE 1 :

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = ?$ et $A \cup B = ?$



EXERCICE 1 :

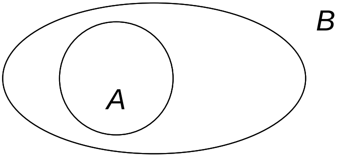
Si $A \subset B$ alors $A \cap B = ?$ et $A \cup B = ?$



SOLUTION : $A \subset B$ donc $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.

EXERCICE 1 :

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = ?$ et $A \cup B = ?$



SOLUTION : $A \subset B$ donc $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.

En effet, $A \cap B$ correspond à tous les éléments appartenant à A et à B mais puisque $A \subset B$, tous les éléments de A sont dans B donc $A \cap B = A$.

En effet, $A \cup B$ correspond à tous les éléments appartenant à A ou à B mais puisque $A \subset B$, tous les éléments de A sont dans B donc $A \cup B = B$.

EXERCICE 2 :

Justifier que quels que soient A et B, $A \Delta B = B \Delta A$.

EXERCICE 2 :

Justifier que quels que soient A et B, $A\Delta B = B\Delta A$.

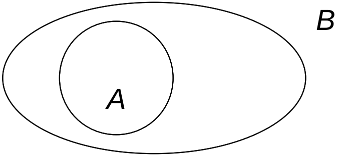
SOLUTION :

Par définition :
$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $B\Delta A = (B \cup A) \setminus (B \cap A)$
Mais comme $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$, on a donc :

$$A\Delta B = B\Delta A$$

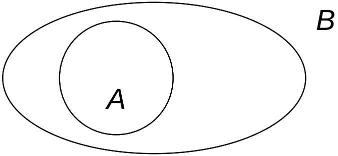
EXERCICE 3 :

Si $A \subset B$ alors $A \Delta B =$



EXERCICE 3 :

Si $A \subset B$ alors $A \Delta B =$



SOLUTION : $A \Delta B = \complement_B A$

En effet, par définition, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

et $A \subset B$ donc $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$

donc $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \setminus A = \complement_B A$

EXERCICE 4 :

Justifier que quels que soient A, B et C sous-ensembles de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCICE 4 :

Justifier que quels que soient A, B et C sous-ensembles de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

SOLUTION :

Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

puis

Montrons que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$:

EXERCICE 4 :

Justifier que quels que soient A, B et C sous-ensembles de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCICE 4 :

Justifier que quels que soient A, B et C sous-ensembles de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

SOLUTION :

Montrons que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$:
$B \cap C \subset B$ donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B)$
et de même $B \cap C \subset C$ donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup C)$
donc $A \cup (B \cap C)$ est inclus dans $(A \cup B)$ et dans $(A \cup C)$ donc est inclus dans leur intersection :

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCICE 4 :

Justifier que quels que soient A, B et C sous-ensembles de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCICE 4 :

Justifier que quels que soient A, B et C sous-ensembles de E on a

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

SOLUTION :

Nous avons montré que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

Montrons que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$:
Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
Par disjonction des cas :
- Si $x \in A$ alors $x \in A \cup (B \cap C)$
- Sinon $x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in B \cap C$ et donc $x \in A \cup (B \cap C)$
Ainsi, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

EXERCICE 5 :

Justifier que quels que soient A et B sous-ensembles de E, on a :

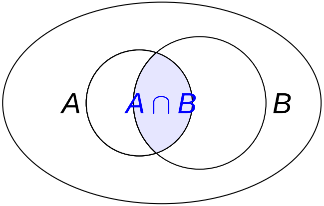
$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

EXERCICE 5 :

Justifier que quels que soient A et B sous-ensembles de E, on a :

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

SOLUTION : on fait un dessin et on colorie en bleu $A \cap B$

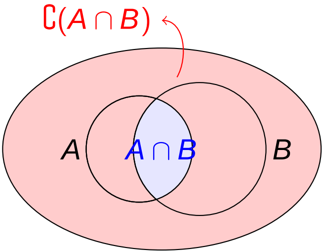


EXERCICE 5 :

Justifier que quels que soient A et B sous-ensembles de E, on a :

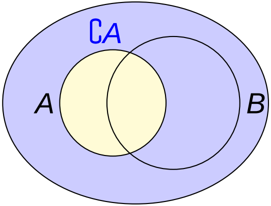
$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$$

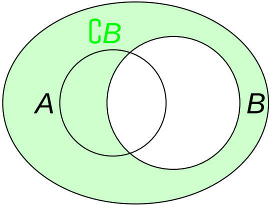
SOLUTION : on colorie en bleu $A \cap B$ puis son complémentaire en rose $\complement(A \cap B)$

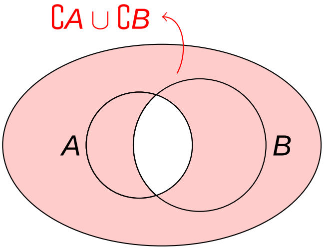


EXERCICE 5 :

Dans un deuxième temps, on colorie en bleu $\complement A$ et en vert $\complement B$; puis en rose $\complement A \cup \complement B$ qui est la partie coloriée au moins une fois en bleu ou en vert :



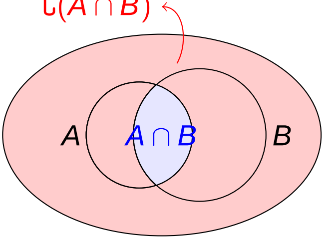




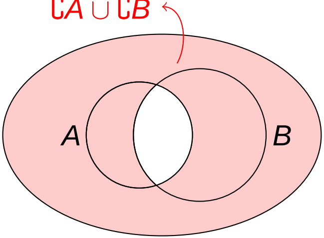
EXERCICE 5 :

Conclusion :

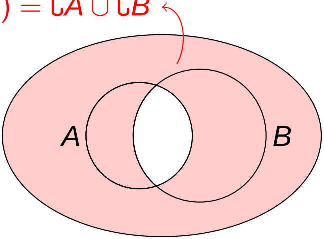
$\complement(A \cap B)$



$\complement A \cup \complement B$



$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$



EXERCICE 6 :

Justifier que quels que soient A et B sous-ensembles de E, on a :

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

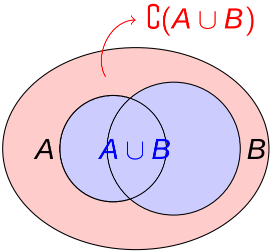
SOLUTION :

EXERCICE 6 :

Justifier que quels que soient A et B sous-ensembles de E, on a :

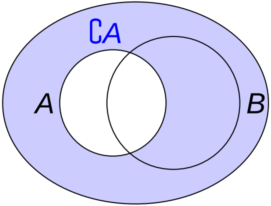
$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

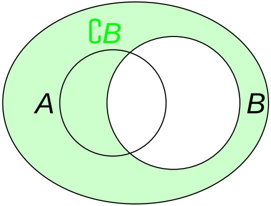
SOLUTION : on fait un dessin et on colorie en bleu $A \cup B$; puis en rose son complémentaire

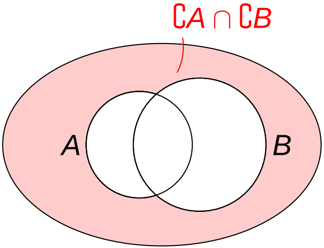


EXERCICE 6 :

Dans un deuxième temps, on colorie en bleu $\complement A$ et en vert $\complement B$; puis en rose $\complement A \cap \complement B$ qui est la partie coloriée deux fois : en bleu et en vert

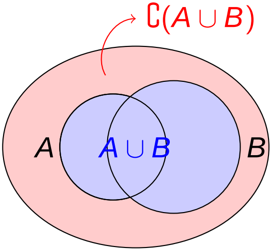


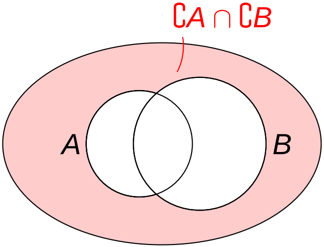




EXERCICE 6 :

Conclusion :





$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$