Applications

Définissons trois propriétés importantes des applications : injectivité, surjectivité, bijectivité.

Supposons donnés deux ensembles E et F et une application de E vers F. On définit alors :

DÉFINITION : f est injective ssi tout élément y de F admet au plus un antécédent par f dans E.
Remarque : c'est à dire y possède 0 ou 1 antécédent dans F. Zéro antécédent si y n'est pas atteint par f. Un seul si y est dans l'image.
Une définition équivalente est :
Deux éléments distincts ont des images distinctes. C'est à dire $\forall(x_1; x_2) \in E,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Ou encore par contraposée : $\forall(x_1; x_2) \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

EXEMPLE :

DÉFINITION : f est surjective ssi tout élément y de F admet au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)$$

Remarque : c'est à dire y possède un ou plusieurs antécédent(s) dans E par f. C'est donc que tout y est atteint au moins une fois par f à partir de l'ensemble E.

EXEMPLE :

DÉFINITION : f est bijective ssi f est à la fois injective et bijective.

EXEMPLE :

PROPRIÉTÉ :
f est non injective ssi il existe deux éléments distincts de E qui ont la même image.
En effet, la négation de

$$\text{« } \forall(x_1; x_2) \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ »}$$

est

$$\text{« } \exists(x_1; x_2) \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2 \text{ »}.$$

EXEMPLE :

f est non surjective ssi il existe un élément de F qui n'a pas d'antécédent.
En effet, la négation de

$$\text{« } \forall y \in F,\ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x) \text{ »}$$

est

$$\text{« } \exists y \in F,\quad \forall x \in E,\quad y \neq f(x) \text{ »}.$$

EXEMPLE :

f est non bijective ssi f est non injective ou non surjective.
En effet, la négation de

$$\text{« } f \text{ est injective et surjective »}$$

est

$$\text{« } f \text{ est non injective ou non surjective »}.$$

EXEMPLE :