logique mathématique

une introduction

J-P SPRIET

2013

Plan

Voici un exposé des bases de la logique mathématique.

1. Histoire de la logique
2. Propositions et connecteurs logiques
3. Quantificateurs logiques
4. Divers types de démonstrations

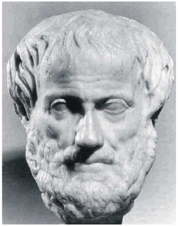
Plan

1. Histoire de la logique
   - définition
2. Propositions et connecteurs logiques
3. Quantificateurs logiques
4. Divers types de démonstrations

La logique (du grec logos : le langage)

La logique (du grec logos : le langage) peut être définie comme l'étude des règles formelles que doit respecter le langage pour exprimer une suite de déductions correctes (vraies).

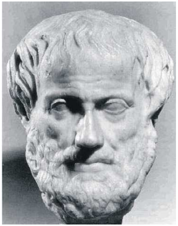
La logique (du grec logos : le langage) peut être définie comme l'étude des règles formelles que doit respecter le langage pour exprimer une suite de déductions correctes (vraies).



Aristote

Aristote

La logique (du grec logos : le langage) peut être définie comme l'étude des règles formelles que doit respecter le langage pour exprimer une suite de déductions correctes (vraies).



Aristote

Aristote (philosophe grec (-384;-322)), disciple de Platon, en fut l'un des maîtres : de par son combat contre les sophistes, il a systématisé les règles des raisonnements à deux propositions (syllogismes) afin de pouvoir écarter certains de leurs raisonnements fallacieux.

Platon et Aristote
détail du tableau de Raphaël (1518) :
L'école d'Athènes

Pour Aristote, la logique a deux finalités :

Pour Aristote, la logique a deux finalités :
Il s’agit, en premier lieu, de rendre la sophistique impossible (les sophistes utilisaient des raisonnements parfois corrects mais sans se soucier de la vérité).

Pour Aristote, la logique a deux finalités :
En second lieu, la logique vise à fonder la philosophie elle-même.
Ainsi, Aristote n’est pas satisfait de certains raisonnements platoniciens. Une philosophie ne peut être rigoureuse que si elle sait comment fonctionne la pensée correcte.

La logique se présente comme une propédeutique (une science préalable) à toute pensée se voulant rationnelle. C’est en ce sens qu’Aristote écrit : « Il faut connaître les Analytiques avant d’aborder aucune science » (les « analytiques » désignent les deux livres essentiels de la logique d’Aristote).
La logique d’Aristote se présente sous la forme de six livres portant globalement, depuis le Moyen-Age, le nom d’Organon.

La logique d’Aristote a influencé toute la scolastique médiévale; de Saint Thomas d’Aquin jusqu’aux "modernes" Leibniz puis Kant. Elle est l’ancêtre de la logique mathématique moderne.

À la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, les différentes parties des mathématiques ont acquis un langage commun : celui de la théorie des ensembles. Ce langage est fondé sur la logique formelle.

À la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, les différentes parties des mathématiques ont acquis un langage commun : celui de la théorie des ensembles. Ce langage est fondé sur la logique formelle.
La formalisation des définitions, des théorèmes et des démonstrations permet d'éviter toute ambiguïté, et d'atteindre un haut niveau de rigueur.

À la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, les différentes parties des mathématiques ont acquis un langage commun : celui de la théorie des ensembles. Ce langage est fondé sur la logique formelle.
La formalisation des définitions, des théorèmes et des démonstrations permet d'éviter toute ambiguïté, et d'atteindre un haut niveau de rigueur.
Cependant, son usage excessif rend parfois les énoncés mathématiques difficiles à déchiffrer. Nous utiliserons donc ce langage sans jamais perdre de vue le sens des propositions manipulées.

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes :

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet,

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.
C'est cette logique que nous allons étudier et décortiquer un minimum...

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.
C'est cette logique que nous allons étudier et décortiquer un minimum...
Par exemple,

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.
C'est cette logique que nous allons étudier et décortiquer un minimum...
Par exemple, en géométrie plane,

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.
C'est cette logique que nous allons étudier et décortiquer un minimum...
Par exemple, en géométrie plane, deux droites sont soit parallèles soit sécantes. Cette propriété ne se démontre pas, on l'admet comme point de départ, elle constitue l'un des axiomes de la géométrie plane.

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.
C'est cette logique que nous allons étudier et décortiquer un minimum...
Par exemple, en géométrie plane, deux droites sont soit parallèles soit sécantes. Cette propriété ne se démontre pas, on l'admet comme point de départ, elle constitue l'un des axiomes de la géométrie plane.
On peut remarquer que cette propriété devient fausse dans le cadre de la géométrie dans l'espace puisque deux droites peuvent aussi être non coplanaires.

Une théorie mathématique est construite sur des axiomes : sortes de principes premiers que l'on admet, et à partir desquels on peut démontrer d'autres propriétés à l'aide de la logique.

C'est cette logique que nous allons étudier et décortiquer un minimum...

Par exemple, en géométrie plane, deux droites sont soit parallèles soit sécantes. Cette propriété ne se démontre pas, on l'admet comme point de départ, elle constitue l'un des axiomes de la géométrie plane.

On peut remarquer que cette propriété devient fausse dans le cadre de la géométrie dans l'espace puisque deux droites peuvent aussi être non coplanaires.

Ainsi, dans ce cours, nous allons étudier les règles de la logique formelle.

Plan

1 Histoire de la logique

2 Propositions et connecteurs logiques
- Qu'est qu'une propositions logique ?
- Table de vérité d'une proposition
- Négation, conjonction, disjonction
- Implication, contraposée, réciproque ; équivalence

3 Quantificateurs logiques

4 Divers types de démonstrations

Une proposition (logique)

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique -

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique)

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ).

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d’une théorie donnée (c’est-à-dire en référence à un ensemble d’axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...)

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)

Exemples :
«$0 = 1$» est une proposition (fausse).

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)

Exemples :
«$0 = 1$» est une proposition (fausse).
«2 est un nombre positif» est une proposition (vraie).

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)

Exemples :
«$0 = 1$» est une proposition (fausse).
«2 est un nombre positif» est une proposition (vraie).
«Tout entier naturel admet un entier qui lui est strictement supérieur» est une proposition (vraie).

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)
«Il existe un entier relatif inférieur à tous les entiers relatifs» est une proposition (fausse);

Une proposition (logique) - appelée aussi assertion logique - est une expression, une phrase (mathématique) dont on peut dire si elle est vraie ou fausse dans le cadre d'une théorie donnée (c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Elle est souvent composée de termes (mathématiques), de connecteurs logiques (et, ou, ...) et de quantificateurs (définis plus loin...)

«Il existe un entier relatif inférieur à tous les entiers relatifs» est une proposition (fausse);

«$2 + 3$» n'est pas une proposition logique.

Les 3 principes d'Aristote

Aristote définit trois principes logiques :

- Le principe de non-contradiction:
  "Il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en temps au même sujet et sous le même rapport"
- Le principe du tiers exclu: "Il ne peut y avoir d'intermédiaire entre deux contraires, un sujet possède ou ne possède pas un attribut donné"
- Le principe d'identité : "Se demander pourquoi une chose est elle-même, c'est enquêter dans le vide parce que l'existence d'une chose doit être claire. Ainsi, le fait qu'une chose est elle-même est la seule réponse et la seule cause dans tous les cas, comme par exemple dans la

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:

Les 3 principes d’Aristote

- Le principe de non-contradiction:
"Il est impossible que le même attribut appartienne et n’appartienne pas en temps au même sujet et sous le même rapport"

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  "Il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en temps au même sujet et sous le même rapport"
  que l'on peut traduire par : une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
- Le principe du tiers exclu:

Les 3 principes d’Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
- Le principe du tiers exclu:
  "Il ne peut y avoir d’intermédiaire entre deux contraires, un sujet possède ou ne possède pas un attribut donné"

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
- Le principe du tiers exclu:
  "Il ne peut y avoir d'intermédiaire entre deux contraires, un sujet possède ou ne possède pas un attribut donné"
  que l'on peut traduire par : une proposition A est forcément vraie ou fausse
- Le principe d'identité :

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
- Le principe du tiers exclu:
  Une proposition A est forcément vraie ou fausse
- Le principe d'identité :
  "Se demander pourquoi une chose est elle-même, c'est enquêter dans le vide parce que l'existence d'une chose doit être claire. Ainsi, le fait qu'une chose est elle-même est la seule réponse et la seule cause dans tous les cas, comme par exemple dans la question "pourquoi un homme est un homme ?"..."

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
- Le principe du tiers exclu:
  Une proposition A est forcément vraie ou fausse
- Le principe d'identité :
  "Se demander pourquoi une chose est elle-même, c'est enquêter dans le vide parce que l'existence d'une chose doit être claire. Ainsi, le fait qu'une chose est elle-même est la seule réponse et la seule cause dans tous les cas, comme par exemple dans la question "pourquoi un homme est un homme ?"..."
  que l'on peut traduire par : la chose A s'explique (ou se vérifie) par elle-même.

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
- Le principe du tiers exclu:
  Une proposition A est forcément vraie ou fausse
- Le principe d'identité :
  La chose A s'explique (ou se vérifie) par elle-même.

En mathématiques, ce sont surtout les deux premiers principes dont on se sert :
Une propriété P est soit vraie soit fausse, et ne peut être les deux en même temps.

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
  Exemple : deux droites dans le plan ne peuvent être sécantes et non sécantes à la fois.

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
  Exemple : deux droites dans le plan ne peuvent être sécantes et non sécantes à la fois.
- Le principe du tiers exclu:
  une proposition A est forcément vraie ou fausse
  Exemple : deux droites dans le plan sont sécantes ou non

Les 3 principes d'Aristote

- Le principe de non-contradiction:
  une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse
  Exemple : deux droites dans le plan ne peuvent être sécantes et non sécantes à la fois.
- Le principe du tiers exclu:
  une proposition A est forcément vraie ou fausse
  Exemple : deux droites dans le plan sont sécantes ou non
- Le principe d'identité :
  ce sont les axiomes

Une proposition peut *dépendre* d’une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu’une telle proposition est un *prédicat*).

Une proposition peut *dépendre* d’une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu’une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple,

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$.

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie et $A(\pi)$ est une proposition

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie et $A(\pi)$ est une proposition fausse.

Une proposition peut *dépendre* d’une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu’une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie et $A(\pi)$ est une proposition fausse.

Remarque : On a dit qu’une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse (dans le cadre d’une théorie donnée; c’est-à-dire en référence à un ensemble d’axiomes acceptés au départ).

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie et $A(\pi)$ est une proposition fausse.

Remarque : On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse (dans le cadre d'une théorie donnée; c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Ceci n'est pas tout à fait exact

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie et $A(\pi)$ est une proposition fausse.

Remarque : On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse (dans le cadre d'une théorie donnée; c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Ceci n'est pas tout à fait exact puisque Gödel a démontré au cours du $XX^{\text{ème}}$ siècle que certaines propriétés sont indécidables : dans le cadre d'une théorie, on démontre qu'on ne peut démontrer si elles sont vraies ou fausses.

Une proposition peut *dépendre* d'une ou plusieurs lettres, appelées variables (on dit parfois qu'une telle proposition est un *prédicat*).
Par exemple, à tout réel x, on peut associer la proposition : «x est un entier impair», que nous notons $A(x)$. Ainsi, $A(3)$ est une proposition vraie et $A(\pi)$ est une proposition fausse.

Remarque : On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse (dans le cadre d'une théorie donnée; c'est-à-dire en référence à un ensemble d'axiomes acceptés au départ). Ceci n'est pas tout à fait exact puisque Gödel a démontré au cours du $XX^{\text{ème}}$ siècle que certaines propriétés sont indécidables : dans le cadre d'une théorie, on démontre qu'on ne peut démontrer si elles sont vraies ou fausses. Mais l'étude de ceci est hors de propos dans le programme de TS.

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas d'une seule proposition P, on a deux cases correspondant à chacune des possibilités envisageables :

P	

On a dit qu’une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c’est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas d’une seule proposition P, on a deux cases correspondant à chacune des possibilités envisageables :

P	
V	

signifie que P est vraie

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas d'une seule proposition P, on a deux cases correspondant à chacune des possibilités envisageables :

P	
V	
F	

signifie que P est fausse

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas de deux propositions P et Q, on a quatre cases correspondant à chacune des possibilités envisageables :

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas de deux propositions P et Q, on a quatre cases correspondant à chacune des possibilités envisageables :

P	Q	
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas de trois propositions P ; Q et R, on a

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas de trois propositions P ; Q et R, on a huit

On a dit qu'une proposition est une expression dont on peut dire si elle est vraie ou fausse
On peut établir sa table de vérité :
c'est un tableau donnant toutes ses valeurs logiques possibles

Dans le cas de trois propositions P ; Q et R, on a huit cases correspondant à chacune des possibilités envisageables

À partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d'autres grâce aux connecteurs logiques.

À partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d'autres grâce aux connecteurs logiques.

Voici les trois premiers connecteurs logiques :

À partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d'autres grâce aux connecteurs logiques.

Voici les trois premiers connecteurs logiques :

négation (non)

À partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d’autres grâce aux connecteurs logiques.

Voici les trois premiers connecteurs logiques :

négation (non) , conjonction (et)

À partir de différentes propositions logiques, on peut en construire d'autres grâce aux connecteurs logiques.

Voici les trois premiers connecteurs logiques :

négation (non) , conjonction (et) , disjonction (ou)

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

On peut écrire sa table de vérité,

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles de la propriété de départ :

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles de la propriété de départ :

P	$Non(P)$
V	
F	

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles de la propriété de départ :

P	$Non(P)$
V	F
F	

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles de la propriété de départ :

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Négation

Si P est une proposition, on définit «non(P)» :

- notée $\neg P$, ou simplement «non(P)» :
  c'est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse sinon.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles de la propriété de départ :

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Remarque : On remarque que P et non(P) ne peuvent être vraies en même temps.

Négation

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Négation

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle"

Négation

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" alors «non(P)» est la proposition :

Négation

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" alors «non(P)» est la proposition : "le triangle ABC n'est pas rectangle"

Négation

P	$Non(P)$
V	F
F	

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" alors «non(P)» est la proposition : "le triangle ABC n'est pas rectangle"

Si P est vraie, non(P) est fausse.

Négation

P	$Non(P)$
V	
F	V

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" alors «non(P)» est la proposition : "le triangle ABC n'est pas rectangle"

Si P est fausse, non(P) est vraie.

Négation

P	$Non(P)$
V	F
F	V

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" alors «non(P)» est la proposition : "le triangle ABC n'est pas rectangle"

On remarque que P et non(P) ne peuvent être vraies en même temps.

Nous avons dit que «non(P)» est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse si P est vraie. Ceci est très utile pour savoir si une proposition est fausse : on écrit sa négation, et on regarde si cette négation est vraie.

Nous avons dit que «non(P)» est une proposition qui est vraie si P est fausse, fausse si P est vraie. Ceci est très utile pour savoir si une proposition est fausse : on écrit sa négation, et on regarde si cette négation est vraie.

On remarque que «non(non(P))» n'est rien d'autre que P.

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie,

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité,

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» : proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	F
F	V	
F	F	

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» : proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	F
F	F	

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» : proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	F

Conjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la conjonction «P et Q» :

- notée $P \wedge Q$, ou simplement «P et Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie et Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" et Q est la proposition : "le triangle ABC est isocèle"

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" et Q est la proposition : "le triangle ABC est isocèle" alors «P et Q» est la proposition :

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" et Q est la proposition : "le triangle ABC est isocèle" alors «P et Q» est la proposition : "le triangle ABC est rectangle et isocèle"

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" et Q est la proposition : "le triangle ABC est isocèle" alors «P et Q» est la proposition : "le triangle ABC est rectangle et isocèle"

Si P est vraie et Q est vraie alors «P et Q» est vraie

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" et Q est la proposition : "le triangle ABC est isocèle" alors «P et Q» est la proposition : "le triangle ABC est rectangle et isocèle"

Dès que P est fausse ou Q est fausse, «P et Q» est fausse.

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

Si P est la proposition : "le triangle ABC est rectangle" et Q est la proposition : "le triangle ABC est isocèle" alors «P et Q» est la proposition : "le triangle ABC est rectangle et isocèle"

Si P est fausse et Q est fausse, «P et Q» est fausse.

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On peut aussi lire le tableau à l'envers :

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On peut aussi lire le tableau à l'envers :

Si «P et Q» est vraie alors P et Q sont toutes les deux vraies en même temps.

Conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On peut aussi lire le tableau à l'envers :

Si «P et Q» est fausse alors l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité,

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	V
F	V	
F	F	

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» :
  proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	V
F	F	

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» : proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	F

Disjonction

Si P et Q sont des propositions, on définit la disjonction «P ou Q» :

- $P \vee Q$, ou simplement «P ou Q» : proposition qui est vraie si P est vraie ou Q est vraie, et fausse dans tous les autres cas.

On peut écrire sa table de vérité, donnant ses valeurs logiques en fonction de celles des propriétés P et Q de départ :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjonction

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On remarque que le «ou» mathématique est inclusif c’est à dire que P et Q peuvent être simultanément vraies, ou bien l’une des deux seulement, pour que «P *ou* Q» soit vraie.

Disjonction

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On remarque que le «ou» mathématique est inclusif c'est à dire que P et Q peuvent être simultanément vraies, ou bien l'une des deux seulement, pour que «P ou Q» soit vraie.
Ce n'est pas toujours le cas en français :

Disjonction

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On remarque que le «ou» mathématique est inclusif c'est à dire que P et Q peuvent être simultanément vraies, ou bien l'une des deux seulement, pour que «P *ou* Q» soit vraie.
Ce n'est pas toujours le cas en français :
Si au restaurant vous lisez sur la carte : "menu : fromage ou dessert", vous n'êtes pas autorisé à prendre des deux dans le cadre du menu.

Disjonction

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On remarque que le «ou» mathématique est inclusif c'est à dire que P et Q peuvent être simultanément vraies, ou bien l'une des deux seulement, pour que «P *ou* Q» soit vraie.
Ce n'est pas toujours le cas en français :
Si vous êtes chez vous et que vos parents vous demandent : "veux tu du fromage ou un dessert ?", vous êtes à priori autorisé à prendre des deux...

Disjonction

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On remarque que le «ou» mathématique est inclusif c'est à dire que P et Q peuvent être simultanément vraies, ou bien l'une des deux seulement, pour que «P *ou* Q» soit vraie.
Ce n'est pas toujours le cas en français :
Si vous êtes chez vous et que vos parents vous demandent : "veux tu du fromage ou un dessert ?", vous êtes à priori autorisé à prendre des deux... tout dépend de votre appétit.

Disjonction

P	Q	P ou Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On peut aussi lire le tableau à l'envers :

Disjonction

P	Q	P ou Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On peut aussi lire le tableau à l'envers :

Si «P ou Q» est vraie alors l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie.

Disjonction

P	Q	P ou Q
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On peut aussi lire le tableau à l'envers :

Si «P ou Q» est fausse alors P et Q sont fausses toutes les deux.

équivalence logique

Lorsque deux propositions P et Q (éventuellement composées voire compliquées) ont les mêmes tables de vérité, autrement dit lorsqu'elles sont simultanément vraies ou fausses, on dit qu'elles sont logiquement équivalentes, et on note $P \equiv Q$.

équivalence logique

Lorsque deux propositions P et Q (éventuellement composées voire compliquées) ont les mêmes tables de vérité, autrement dit lorsqu'elles sont simultanément vraies ou fausses, on dit qu'elles sont logiquement équivalentes, et on note $P \equiv Q$.

En utilisant les tables de vérité liées aux connecteurs logiques, on démontre les, très utiles, lois de Morgan, donnant la négation d'un «et» et d'un «ou» :

$$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$$

$$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$$

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F	F	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Lois de Morgan : montrons que
$Non(P \text{ et } Q) \equiv Non(P) \text{ ou } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P et Q	$Non(P$ et $Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ ou $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Conclusion : les deux propositions $Non(P \text{ et } Q)$ et

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P \text{ ou } Q)$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V		
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F		

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F		
V	F	F		
F	V	V		
F	F	V		

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F	F	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Lois de Morgan : montrons de la même façon que
$Non(P \text{ ou } Q) \equiv Non(P) \text{ et } Non(Q)$
on réalise leurs tables de vérité :

P	Q	P ou Q	$Non(P$ ou $Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(Q)$	$Non(P)$ et $Non(Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Conclusion : les deux propositions $Non(P \text{ ou } Q)$ et

associativité

On a aussi les règles suivantes (dites d'« associativité » et de « distributivité ») :

$[(P \text{ et } Q) \text{ et } R] \equiv [P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$

$[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R] \equiv [P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$

$[(P \text{ et } Q) \text{ ou } R] \equiv [(P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)]$

$[(P \text{ ou } Q) \text{ et } R] \equiv [(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$

associativité

On a aussi les règles suivantes (dites d'« associativité » et de « distributivité ») :

$[(P \text{ et } Q) \text{ et } R] \equiv [P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$

$[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R] \equiv [P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$

$[(P \text{ et } Q) \text{ ou } R] \equiv [(P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)]$

$[(P \text{ ou } Q) \text{ et } R] \equiv [(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$

« associativité » fait écho à l'associativité de l'addition : on peut déplacer ou supprimer les parenthèses lorsque le calcul ne comporte que des additions. Ici c'est la même chose lorsqu'il n'y a que des "et".

associativité

On a aussi les règles suivantes (dites d'« associativité » et de « distributivité ») :

$[(P \text{ et } Q) \text{ et } R] \equiv [P \text{ et } (Q \text{ et } R)]$

$[(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R] \equiv [P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)]$

$[(P \text{ et } Q) \text{ ou } R] \equiv [(P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)]$

$[(P \text{ ou } Q) \text{ et } R] \equiv [(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$

« associativité » fait écho à l'associativité de l'addition : on peut déplacer ou supprimer les parenthèses lorsque le calcul ne comporte que des additions. Ici c'est la même chose lorsqu'il n'y a que des "et".

« distributivité » fait écho à la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Implication

On veut donner une définition (mathématique donc rigoureuse) à la phrase mathématique (donc la proposition logique) «P implique Q», notée «$P \Rightarrow Q$».

Implication

On veut donner une définition (mathématique donc rigoureuse) à la phrase mathématique (donc la proposition logique) «P implique Q», notée «$P \Rightarrow Q$».
Cette phrase doit intuitivement traduire le fait que Q est une conséquence logique de P ou encore que Q est forcément vraie, dès lors que P est vraie.

Implication

On veut donner une définition (mathématique donc rigoureuse) à la phrase mathématique (donc la proposition logique) «P implique Q», notée «$P \Rightarrow Q$».

Cette phrase doit intuitivement traduire le fait que Q est une conséquence logique de P ou encore que Q est forcément vraie, dès lors que P est vraie.

Exemple : ABC triangle équilatéral implique ABC triangle isocèle.

Se note : ABC équilatéral $\Rightarrow$ ABC isocèle.

Cette implication étant vraie, dès que ABC est un triangle équilatéral, il est alors par voie de conséquence un triangle isocèle.

Implication

Dans une phrase, la notion d'implication logique est caractérisée par les termes «Si ... Alors ...». Ceci ayant le même sens que le $\Rightarrow$ mathématique.
Exemple : la phrase "Si ABC est un triangle équilatéral alors ABC est un triangle isocèle" traduit la même chose (le même lien logique) que l'écriture mathématique "ABC équilatéral $\Rightarrow$ ABC isocèle".

Implication

Dans une phrase, la notion d'implication logique est caractérisée par les termes «Si ... Alors ...». Ceci ayant le même sens que le $\Rightarrow$ mathématique.
Exemple : la phrase "Si ABC est un triangle équilatéral alors ABC est un triangle isocèle" traduit la même chose (le même lien logique) que l'écriture mathématique "ABC équilatéral $\Rightarrow$ ABC isocèle".
Remarque : il ne pas confondre $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ dont nous parlerons tout à l'heure.

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V		V
V		
F		
F		

Si P est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai alors forcément Q est

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V		
F		
F		

Si P est vrai et $P \Rightarrow Q$ est vrai alors forcément Q est vrai.

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	
F		
F		

Si P est vrai et Q est faux alors $P \Rightarrow Q$

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F		
F		

Si P est vrai et Q est faux alors $P \Rightarrow Q$ n'est pas vrai ; donc forcément $P \Rightarrow Q$ est faux.

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V		
V		
F		V
F		V

Si $P \Rightarrow Q$ est vrai et P est faux alors Q

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V		
V		
F	V	V
F	F	V

Si $P \Rightarrow Q$ est vrai et P est faux alors Q peut être vrai ou faux, on ne le sait pas.

Voici la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V		
V		
F	V	V
F	F	V

Si $P \Rightarrow Q$ est vrai et P est faux alors Q peut être vrai ou faux, on ne le sait pas.
Par exemple, "ABC équilatéral $\Rightarrow$ ABC isocèle" est vrai ; si ABC n'est pas équilatéral, alors ABC peut être isocèle ou non

Voici donc la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Voici donc la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On remarque que, mathématiquement, «le faux implique n'importe quoi», autrement dit, si P est fausse, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de Q.

Voici donc la table de vérité de la proposition «$P \Rightarrow Q$» :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

On remarque que, mathématiquement, «le faux implique n'importe quoi», autrement dit, si P est fausse, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de Q.
C'est le sens commun de la boutade : "si ce que tu dis est vrai alors je suis la reine d'Angleterre".

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

MÉTHODE : Une chose à laquelle sert l'implication dans une démonstration est la suivante :
si on sait que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, et si P est vraie, alors on peut déduire que Q est vraie.

ATTENTION : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors on sait que P vraie entraîne Q vraie.

ATTENTION : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors on sait que P vraie entraîne Q vraie.
Mais attention, si P est fausse, on ne peut rien dire sur Q !

ATTENTION : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors on sait que P vraie entraîne Q vraie.
Mais attention, si P est fausse, on ne peut rien dire sur Q !
Par exemple, l'implication $(x = 0) \Longrightarrow (xy = 0)$ est vraie.
On peut donc affirmer que si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$.

ATTENTION : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors on sait que P vraie entraîne Q vraie.
Mais attention, si P est fausse, on ne peut rien dire sur Q !
Par exemple, l'implication $(x = 0) \Longrightarrow (xy = 0)$ est vraie.
On peut donc affirmer que si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$.
Par contre, si $x \neq 0$, on ne peut rien dire sur le produit xy : il peut être nul ou non.

ATTENTION : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors on sait que P vraie entraîne Q vraie.

Mais attention, si P est fausse, on ne peut rien dire sur Q !

Par exemple, l'implication $(x = 0) \Longrightarrow (xy = 0)$ est vraie.

On peut donc affirmer que si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$.

Par contre, si $x \neq 0$, on ne peut rien dire sur le produit xy : il peut être nul ou non.

Cet exemple mathématique, qui peut paraître assez évident, peut être comparé à un exemple de la logique "courante" :

si j'affirme (et je ne mens pas) : "s'il pleut alors je vais au cinéma" alors s'il ne pleut pas... je ne peux pas affirmer que je ne suis pas allé au cinéma; et je ne peux pas non plus affirmer que j'y suis allé.

ATTENTION : Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie alors on sait que P vraie entraîne Q vraie.
Mais attention, si P est fausse, on ne peut rien dire sur Q !
Par exemple, l'implication $(x = 0) \Longrightarrow (xy = 0)$ est vraie.
On peut donc affirmer que si $x = 0$, alors on est sûr que $xy = 0$.
Par contre, si $x \neq 0$, on ne peut rien dire sur le produit xy : il peut être nul ou non.
Cet exemple mathématique, qui peut paraître assez évident, peut être comparé à un exemple de la logique "courante" :
si j'affirme (et je ne mens pas) : "s'il pleut alors je vais au cinéma" alors s'il ne pleut pas... je ne peux pas affirmer que je ne suis pas allé au cinéma; et je ne peux pas non plus affirmer que j'y suis allé.
Est-ce aussi évident ??? Posez la question à votre famille ce soir à table... vous verrez des réponses... parfois illogiques.

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \; ou \; Q]$$

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \; ou \; Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P)$ ou Q
V	V	F	
V	F		
F	V		
F	F		

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \ ou \ Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P) \ ou \ Q$
V	V	F	V
V	F		
F	V		
F	F		

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P) \ ou \ Q$ ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes.

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \; ou \; Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P)$ ou Q
V	V	F	V
V	F	F	
F	V		
F	F		

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P)$ *ou* Q ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes.

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P)\ ou\ Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V		
F	F		

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P)\ ou\ Q$ ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes.

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \ ou \ Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P)$ ou Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	
F	F		

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P)$ *ou* Q ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes.

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P)\ ou\ Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F		

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P)\ ou\ Q$ ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \ ou \ Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P) \ ou \ Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P) \ ou \ Q$ ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes.

Propriété : En observant la table de vérité de «$P \Rightarrow Q$», on remarque que «$P \Rightarrow Q$» est vrai si, et seulement si, P est fausse ou Q est vraie, autrement dit :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \; ou \; Q]$$

Démonstration : on compare les tables de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$Non(P)$	$Non(P) \; ou \; Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Conclusion : les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Non(P) \; ou \; Q$ ont les mêmes tables de vérité donc elles sont logiquement équivalentes.

Négation d'une implication

On vient de voir que $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$.
Or on sait nier un "ou" :

$$Non[(NonP)\ ou\ Q] \equiv$$

Négation d'une implication

On vient de voir que $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$.
Or on sait nier un "ou" :

$$Non[(NonP)\ ou\ Q] \equiv Non[(NonP)]\ et\ Non(Q) \equiv$$

Négation d'une implication

On vient de voir que $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$.
Or on sait nier un "ou" :

$$Non[(NonP)\ ou\ Q] \equiv Non[(NonP)]\ et\ Non(Q) \equiv P\ et\ Non(Q)$$

Négation d'une implication

On vient de voir que $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$.
Or on sait nier un "ou" :

$$Non[(NonP)\ ou\ Q] \equiv Non[(NonP)]\ et\ Non(Q) \equiv P\ et\ Non(Q)$$

Autrement dit, une implication est fausse si et seulement si le premier terme est vrai alors que le deuxième terme ne l'est pas (utile dans les démonstrations).

Négation d'une implication

On vient de voir que $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$.
Or on sait nier un "ou" :

$$Non[(NonP)\ ou\ Q] \equiv Non[(NonP)]\ et\ Non(Q) \equiv P\ et\ Non(Q)$$

Autrement dit, une implication est fausse si et seulement si le premier terme est vrai alors que le deuxième terme ne l'est pas (utile dans les démonstrations).

EXEMPLE :

L'assertion « ABC isocèle implique ABC équilatéral » est fausse car il existe un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral.

Négation d'une implication

On vient de voir que $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$.
Or on sait nier un "ou" :

$$Non[(NonP)\ ou\ Q] \equiv Non[(NonP)]\ et\ Non(Q) \equiv P\ et\ Non(Q)$$

Autrement dit, une implication est fausse si et seulement si le premier terme est vrai alors que le deuxième terme ne l'est pas (utile dans les démonstrations).

EXEMPLE :
L'assertion « *ABC* isocèle implique *ABC* équilatéral » est fausse car il existe un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral.

ATTENTION : On retiendra que la négation d'une implication n'est pas une implication.

Exemple logique

je vous affirme "s’il pleut alors je vais au cinéma". J’ai menti. Que s’est-il passé ?

Exemple logique

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai menti.
Que s'est-il passé ?
On décortique la phrase :

Exemple logique

je vous affirme "s’il pleut alors je vais au cinéma". J’ai menti. Que s’est-il passé ?
On décortique la phrase : en notant P =« il pleut » et Q=« cinéma » alors la phrase signifie que $P \Rightarrow Q$

Exemple logique

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai menti. Que s'est-il passé ?
On décortique la phrase : en notant P =« il pleut » et Q=« cinéma » alors la phrase signifie que $P \Rightarrow Q$
la négation de $P \Rightarrow Q$ est P et $non(Q)$ donc on peut affirmer que

il pleut et non(cinéma)

Exemple logique

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai menti. Que s'est-il passé ?
On décortique la phrase : en notant $P =$« il pleut » et Q=« cinéma » alors la phrase signifie que $P \Rightarrow Q$
la négation de $P \Rightarrow Q$ est P et $non(Q)$ donc on peut affirmer que

il pleut et non(cinéma)

soit : « il a plu et (pourtant) je ne suis pas allé au cinéma »

Contraposée d'une implication

On appelle contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$, l'implication $(Non(Q) \Rightarrow Non(P))$.

Contraposée d'une implication

On appelle contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$, l'implication $(Non(Q) \Rightarrow Non(P))$.

Le (très grand) intérêt de cette notion, réside dans le fait que ces deux implications sont logiquement équivalentes. Ainsi, on pour démontrer une implication, il suffit de démontrer sa contraposée :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (Non(Q) \Rightarrow Non(P))$$

Contraposée d'une implication

On appelle contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$, l'implication $(Non(Q) \Rightarrow Non(P))$.

Le (très grand) intérêt de cette notion, réside dans le fait que ces deux implications sont logiquement équivalentes. Ainsi, on pour démontrer une implication, il suffit de démontrer sa contraposée :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (Non(Q) \Rightarrow Non(P))$$

En effet, $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \; ou \; Q]$

Contraposée d'une implication

On appelle contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$, l'implication $(Non(Q) \Rightarrow Non(P))$.

Le (très grand) intérêt de cette notion, réside dans le fait que ces deux implications sont logiquement équivalentes. Ainsi, on pour démontrer une implication, il suffit de démontrer sa contraposée :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (Non(Q) \Rightarrow Non(P))$$

En effet, $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP) \; ou \; Q]$
et $(Non(Q) \Rightarrow Non(P)) \equiv [(Non(Non(Q))) \; ou \; Non(P)] \equiv [Q \; ou \; Non(P)]$.

Contraposée d'une implication

On appelle contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$, l'implication $(Non(Q) \Rightarrow Non(P))$.

Le (très grand) intérêt de cette notion, réside dans le fait que ces deux implications sont logiquement équivalentes. Ainsi, on pour démontrer une implication, il suffit de démontrer sa contraposée :

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (Non(Q) \Rightarrow Non(P))$$

En effet, $(P \Rightarrow Q) \equiv [(NonP)\ ou\ Q]$
et $(Non(Q) \Rightarrow Non(P)) \equiv [(Non(Non(Q)))\ ou\ Non(P)] \equiv [Q\ ou\ Non(P)]$.
d'où la conclusion : $(P \Rightarrow Q) \equiv (Non(Q) \Rightarrow Non(P))$

Exemple de raisonnement par contraposée

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai dit la vérité. Je vous affirme le lendemain que je ne suis pas allé au cinéma.

Exemple de raisonnement par contraposée

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai dit la vérité. Je vous affirme le lendemain que je ne suis pas allé au cinéma.

On décortique la phrase :

Exemple de raisonnement par contraposée

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai dit la vérité. Je vous affirme le lendemain que je ne suis pas allé au cinéma.

On décortique la phrase : en notant P =« il pleut » et Q=« cinéma » alors la phrase signifie que $P \Rightarrow Q$

Exemple de raisonnement par contraposée

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai dit la vérité. Je vous affirme le lendemain que je ne suis pas allé au cinéma.
On décortique la phrase : en notant P =« il pleut » et Q=« cinéma » alors la phrase signifie que $P \Rightarrow Q$
la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $non(Q) \Rightarrow non(P)$ donc on peut affirmer que

Exemple de raisonnement par contraposée

je vous affirme "s'il pleut alors je vais au cinéma". J'ai dit la vérité. Je vous affirme le lendemain que je ne suis pas allé au cinéma.

On décortique la phrase : en notant P =« il pleut » et Q=« cinéma » alors la phrase signifie que $P \Rightarrow Q$

la contraposée de $P \Rightarrow Q$ est $non(Q) \Rightarrow non(P)$ donc on peut affirmer que

« je ne suis pas allé au cinéma donc il n'a pas plu »

Exemple de raisonnement par contraposée

Soit p un entier ; si p est pair alors p^2 est pair.

Par contraposée,

Exemple de raisonnement par contraposée

Soit p un entier ; si p est pair alors p^2 est pair.

Par contraposée, si p^2 n'est pas pair alors p n'est pas pair.

Autrement dit:

Exemple de raisonnement par contraposée

Soit p un entier ; si p est pair alors p^2 est pair.

Par contraposée, si p^2 n'est pas pair alors p n'est pas pair.

Autrement dit: si p^2 est impair alors p est impair.

Réciproque d'une implication

Si $(P \Rightarrow Q)$ est une implication alors son implication réciproque est $(Q \Rightarrow P)$.

Réciproque d'une implication

Si $(P \Rightarrow Q)$ est une implication alors son implication réciproque est $(Q \Rightarrow P)$.
Il n'y a pas de lien logique entre une implication et sa réciproque.
Par exemple,

Réciproque d'une implication

Si $(P \Rightarrow Q)$ est une implication alors son implication réciproque est $(Q \Rightarrow P)$.

Il n'y a pas de lien logique entre une implication et sa réciproque.

Par exemple,

l'assertion « ABC équilatéral implique ABC isocèle » est vraie.

Sa réciproque « ABC isocèle implique ABC équilatéral » est fausse car il existe un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral.

Réciproque d'une implication

Si $(P \Rightarrow Q)$ est une implication alors son implication réciproque est $(Q \Rightarrow P)$.
Il n'y a pas de lien logique entre une implication et sa réciproque.
Par exemple,
l'assertion « ABC équilatéral implique ABC isocèle » est vraie. Sa réciproque « ABC isocèle implique ABC équilatéral » est fausse car il existe un triangle isocèle qui n'est pas équilatéral.
l'assertion « $ABCD$ carré implique $ABCD$ rectangle et losange » est vraie. Sa réciproque « $ABCD$ rectangle et losange implique $ABCD$ carré » est vraie elle aussi.

Équivalence

DÉFINITION : L'équivalence de deux propositions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, est vraie si et seulement si les propositions P et Q sont simultanément vraies ou fausses.

Équivalence

DÉFINITION : L'équivalence de deux propositions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, est vraie si et seulement si les propositions P et Q sont simultanément vraies ou fausses.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Équivalence

DÉFINITION : L'équivalence de deux propositions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, est vraie si et seulement si les propositions P et Q sont simultanément vraies ou fausses.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

PROPRIÉTÉ : $P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie et sa réciproque $(Q \Rightarrow P)$ est vraie aussi.

Équivalence

DÉFINITION : L'équivalence de deux propositions P et Q, notée $P \Leftrightarrow Q$, est vraie si et seulement si les propositions P et Q sont simultanément vraies ou fausses.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

PROPRIÉTÉ : $P \Leftrightarrow Q$ si et seulement si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie et sa réciproque $(Q \Rightarrow P)$ est vraie aussi.

Exemple : « $ABCD$ carré $\Leftrightarrow$ $ABCD$ rectangle et losange »

Lorsque l'on a $(P \Leftrightarrow Q)$, on dit que Q est une condition nécessaire et suffisante (souvent abrégé CNS) de P.

Plan

1 Histoire de la logique

2 Propositions et connecteurs logiques

3 Quantificateurs logiques
- Quantificateur ∀
- Quantificateur ∃
- Négation des quantificateurs
- Unicité
- Existence et unicité

4 Divers types de démonstrations

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\forall x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout objet x de l'ensemble de référence.»

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\forall x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout objet x de l'ensemble de référence.»
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel (c'est un A à l'envers en référence à l'allemand *Alle*).

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\forall x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout objet x de l'ensemble de référence.»
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur universel (c'est un A à l'envers en référence à l'allemand *Alle*).
Pour éviter toute ambiguïté sur le référentiel, on notera souvent

$$\forall x \in E, \quad P(x),$$

qui se lit «pour tout x appartenant à E, $P(x)$ (est vraie)» ou bien «quel que soit x appartenant à E, $P(x)$ (est vraie)».

Exemples d'utilisation du quantificateur $\forall$:

Pour tout réel x, on a x^2 positif. Cette propriété s'écrit :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0.$

Exemples d'utilisation du quantificateur ∀ :

Pour tout réel x, on a x^2 positif. Cette propriété s'écrit :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0.$
Pour tout réel $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$. Cette propriété s'écrit :
$\forall x \geq 1, \quad x^2 \geq x.$

Exemples d'utilisation du quantificateur $\forall$:

Pour tout réel x, on a x^2 positif. Cette propriété s'écrit :
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0.$
Pour tout réel $x \geq 1$, on a $x^2 \geq x$. Cette propriété s'écrit :
$\forall x \geq 1, \quad x^2 \geq x.$
Pour tout entier naturel n, on a $2n$ pair. Cette propriété s'écrit :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n$ est pair.

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\exists x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «il existe au moins un objet x de l'ensemble de référence tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.»

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\exists x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «il existe au moins un objet x de l'ensemble de référence tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.»
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel (c'est un E retourné en référence à l'allemand *Existieren*).

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\exists x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «il existe au moins un objet x de l'ensemble de référence tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.»
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel (c'est un E retourné en référence à l'allemand *Existieren*).

Remarque : la question de savoir si le x qui vérifie $P(x)$ est unique ou s'il y en a plusieurs n'est pas précisée par ce quantificateur.

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x, x représentant un objet d'un ensemble de référence E.
On peut alors associer à $P(x)$ la proposition suivante :

$$«\exists x \quad P(x)»$$

qui s'énonce : «il existe au moins un objet x de l'ensemble de référence tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie.»
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel (c'est un E retourné en référence à l'allemand *Existieren*).
Là encore, pour éviter toute ambiguïté sur le référentiel, on notera souvent :

$$\exists x \in E, \quad P(x),$$

qui se lit «il existe (au moins) un x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie)» ou bien «pour au moins un x appartenant à

Exemples d'utilisation du quantificateur $\exists$:

Il existe un réel x dont le carré est égal à 2. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$.

Exemples d'utilisation du quantificateur $\exists$:

Il existe un réel x dont le carré est égal à 2. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$.
Il en existe plusieurs mais ce n'est pas précisé, car pas forcément utile de le savoir.

Exemples d'utilisation du quantificateur $\exists$:

Il existe un réel x dont le carré est égal à 2. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$.
Il en existe plusieurs mais ce n'est pas précisé, car pas forcément utile de le savoir.
Il existe un réel x dont le carré est égal à 0. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 0$.

Exemples d'utilisation du quantificateur $\exists$:

Il existe un réel x dont le carré est égal à 2. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$.
Il en existe plusieurs mais ce n'est pas précisé, car pas forcément utile de le savoir.
Il existe un réel x dont le carré est égal à 0. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 0$.
Il en existe un seul mais ce n'est pas précisé.

Exemples d'utilisation du quantificateur $\exists$:

Il existe un réel x dont le carré est égal à 2. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2.$
Il en existe plusieurs mais ce n'est pas précisé, car pas forcément utile de le savoir.
Il existe un réel x dont le carré est égal à 0. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 0.$
Il en existe un seul mais ce n'est pas précisé.
Il existe un entier naturel n, tel que $2n$ est pair. Cette propriété s'écrit : $\exists n \in \mathbb{N}, \quad 2n$ est pair.

Exemples d'utilisation du quantificateur $\exists$:

Il existe un réel x dont le carré est égal à 2. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 2$.
Il en existe plusieurs mais ce n'est pas précisé, car pas forcément utile de le savoir.
Il existe un réel x dont le carré est égal à 0. Cette propriété s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 0$.
Il en existe un seul mais ce n'est pas précisé.
Il existe un entier naturel n, tel que $2n$ est pair. Cette propriété s'écrit : $\exists n \in \mathbb{N}, \quad 2n$ est pair.
puisque c'est vrai pour tous, c'est vrai pour au moins un entier.

Exemple mathématique

REMARQUE : Une variable qui a été quantifiée par un quantificateur universel devient «muette» : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf les symboles figurant déjà ailleurs dans l'énoncé pour éviter les confusions).

Par exemple, il est équivalent d'écrire $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0)$ et $(\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 \geq 0)$.

Exemple mathématique

REMARQUE : Une variable qui a été quantifiée par un quantificateur universel devient «muette» : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf les symboles figurant déjà ailleurs dans l'énoncé pour éviter les confusions).

Par exemple, il est équivalent d'écrire $(\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0)$ et $(\forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 \geq 0)$.

Par contre, une variable qui a été quantifiée par un quantificateur existentiel devient «liée» : si j'écris $\exists x > 0$ et $\exists y > 0$ alors x et y ne sont, à priori, pas les mêmes.

Exemple de logique courante

REMARQUE : Une variable qui a été quantifiée par un quantificateur universel devient «muette» : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf les symboles figurant déjà ailleurs dans l'énoncé pour éviter les confusions).

Lorsqu'on parle de « tous les élèves λ de la classe », λ est une variable muette ; on aurait pu les appeler α tout autant.

Exemple de logique courante

REMARQUE : Une variable qui a été quantifiée par un quantificateur universel devient «muette» : son écriture peut être remplacée par n'importe quel symbole (sauf les symboles figurant déjà ailleurs dans l'énoncé pour éviter les confusions).

Lorsqu'on parle de « tous les élèves λ de la classe », λ est une variable muette ; on aurait pu les appeler α tout autant.

Par contre, une variable qui a été quantifiée par un quantificateur existentiel devient «liée» :
si je dis « il existe (au moins) un garçon x dans la classe » et « il existe dans la classe (au moins) un élève y qui porte des lunettes », alors x et y ne sont, à priori, pas les mêmes ; mais il se pourrait que $x = y$, c'est à dire qu'il s'agisse de la même personne.

lien entre $\forall$ et $\exists$

$\forall$ implique $\exists$ dès que l'ensemble de référence n'est pas vide :

lien entre $\forall$ et $\exists$

$\forall$ implique $\exists$ dès que l'ensemble de référence n'est pas vide :
Si on dit :
« tous les élèves du groupe ont des lunettes »
alors on en conclue que
« il existe (au moins) un élève du groupe qui a des lunettes. »
dès que l'on sait que le groupe n'est pas vide.

lien entre ∀ et ∃

∀ implique ∃ dès que l'ensemble de référence n'est pas vide :
Si on dit :
« tous les élèves du groupe ont des lunettes »
alors on en conclue que
« il existe (au moins) un élève du groupe qui a des lunettes. »
dès que l'on sait que le groupe n'est pas vide.
En mathématiques,

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

implique

lien entre $\forall$ et $\exists$

$\forall$ implique $\exists$ dès que l'ensemble de référence n'est pas vide :
Si on dit :
« tous les élèves du groupe ont des lunettes »
alors on en conclue que
« il existe (au moins) un élève du groupe qui a des lunettes. »
dès que l'on sait que le groupe n'est pas vide.
En mathématiques,

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

implique

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

dès que $E \neq \emptyset$.

Ordre des quantificateurs

Attention : Lorsqu'on utilise des propositions utilisant plusieurs quantificateurs logiques successif, on ne peut pas, en général, commuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Soit $P(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables.

- $[\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y)]$ se lit de gauche à droite et signifie que pour chaque y, on peut trouver un x *qui peut dépendre de* y tel que $P(x,y)$ soit vraie.

Ordre des quantificateurs

Attention : Lorsqu'on utilise des propositions utilisant plusieurs quantificateurs logiques successif, on ne peut pas, en général, commuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables.

- $[\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x, y)]$ se lit de gauche à droite et signifie que pour chaque y, on peut trouver un x *qui peut dépendre de* y tel que $P(x, y)$ soit vraie.
  Par exemple, $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x > y]$ signifie que pour chaque y réel, on peut trouver un réel x tel que $x > y$: par exemple $x = y + 1$.

Ordre des quantificateurs

Attention : Lorsqu'on utilise des propositions utilisant plusieurs quantificateurs logiques successif, on ne peut pas, en général, commuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables.

- $[\forall y \in E, \ \exists x \in E, \ P(x, y)]$ se lit de gauche à droite et signifie que pour chaque y, on peut trouver un x *qui peut dépendre de* y tel que $P(x, y)$ soit vraie.
- $[\exists x \in E, \ \forall y \in E, \ P(x, y)]$ signifie que l'on peut trouver un x tel que pour tous les y on ait $P(x, y)$. Autrement dit, c'est le même x qui "marche" pour tous les y.

Ordre des quantificateurs

Attention : Lorsqu'on utilise des propositions utilisant plusieurs quantificateurs logiques successif, on ne peut pas, en général, commuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Soit $P(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables.

- $[\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y)]$ se lit de gauche à droite et signifie que pour chaque y, on peut trouver un x *qui peut dépendre de y* tel que $P(x,y)$ soit vraie.
- $[\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)]$ signifie que l'on peut trouver un x tel que pour tous les y on ait $P(x,y)$. Autrement dit, c'est le même x qui "marche" pour tous les y.
  Par exemple, $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \ x > y]$ signifie qu'il existe un réel x qui est plus grand que tous les réels y ; ceci est faux.

Ordre des quantificateurs

Attention : Lorsqu'on utilise des propositions utilisant plusieurs quantificateurs logiques successif, on ne peut pas, en général, commuter les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables.

- $[\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x, y)]$ se lit de gauche à droite et signifie que pour chaque y, on peut trouver un x *qui peut dépendre de* y tel que $P(x, y)$ soit vraie.
- $[\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x, y)]$ signifie que l'on peut trouver un x tel que pour tous les y on ait $P(x, y)$. Autrement dit, c'est le même x qui "marche" pour tous les y.

C'est cette notion de dépendance des variables les unes par rapport aux autres qui génère des erreurs si l'on ne prend pas de précaution.

En fait, on a :

$$[\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)] \Longrightarrow [\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y)]$$

mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

En fait, on a :

$$[\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)] \Longrightarrow [\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y)]$$

mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple :

$[\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \leq y^2]$
Il suffit de prendre $x = 0$: $0 \in \mathbb{R}$ et vérifie $\forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq y^2$.
Donc $[\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x \leq y^2]$
Pour tout réel y, il suffit de prendre le même x : $x = 0$; $0 \in \mathbb{R}$ et vérifie $0 \leq y^2$.

En fait, on a :

$$[\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)] \Longrightarrow [\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ P(x,y)]$$

mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple :

Les nombres rationnels peuvent être caractérisés par :
$\forall x \in \mathbb{Q},\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ qx \in \mathbb{Z}$ (*q est le dénominateur d'une fraction représentant x*). Ici, q dépend de x.
Mais l'assertion $\exists q \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{Q},\ qx \in \mathbb{Z}$ est fausse puisqu'elle exprime l'existence d'un dénominateur commun à toutes les fractions. Notons qu'ici q devrait ne plus dépendre de x, et c'est cela qui devient faux.

deux quantificateurs identiques successifs commutent

Si on dit :

« tous les élèves de la première ligne et tous les élèves de la première colonne ont des lunettes »

ou

deux quantificateurs identiques successifs commutent

Si on dit :

« tous les élèves de la première ligne et tous les élèves de la première colonne ont des lunettes »

ou

« tous les élèves de la première colonne et tous les élèves de la première ligne ont des lunettes »

alors on dit la même chose.

deux quantificateurs identiques successifs commutent

Si on dit :

« tous les élèves de la première ligne et tous les élèves de la première colonne ont des lunettes »

ou

« tous les élèves de la première colonne et tous les élèves de la première ligne ont des lunettes »

alors on dit la même chose.

En mathématiques,

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x, y)$$

ou

deux quantificateurs identiques successifs commutent

Si on dit :

« tous les élèves de la première ligne et tous les élèves de la première colonne ont des lunettes »

ou

« tous les élèves de la première colonne et tous les élèves de la première ligne ont des lunettes »

alors on dit la même chose.

En mathématiques,

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x, y)$$

ou

$$\forall y \in F, \forall x \in E, \quad P(x, y)$$

disent la même chose

En mathématiques, si on utilise deux élément du même ensemble E avec le même quantificateur, alors on peut simplifier les écritures :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad P(x, y)$$

s'écrit aussi :

En mathématiques, si on utilise deux élément du même ensemble E avec le même quantificateur, alors on peut simplifier les écritures :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad P(x, y)$$

s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad P(x, y)$$

En mathématiques, si on utilise deux élément du même ensemble E avec le même quantificateur, alors on peut simplifier les écritures :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad P(x, y)$$

s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad P(x, y)$$

E^2 représente $E \times E$ c'est à dire l'ensemble des couples d'éléments de E.

Négation d'une proposition quantifiée

$$Non(\exists x \in E, \quad P(x)) \equiv$$

Négation d'une proposition quantifiée

$$Non(\exists x \in E, \quad P(x)) \equiv \forall x \in E, \quad Non(P(x))$$

Négation d'une proposition quantifiée

$$Non(\exists x \in E, \quad P(x)) \equiv \forall x \in E, \quad Non(P(x))$$

La négation de : « il existe au moins un garçon dans la classe » est « tous les élèves de la classe sont des filles »

Négation d'une proposition quantifiée

$$Non(\exists x \in E, \quad P(x)) \equiv \forall x \in E, \quad Non(P(x))$$

La négation de : « il existe au moins un garçon dans la classe » est « tous les élèves de la classe sont des filles »

$$Non(\forall x \in E, \quad P(x)) \equiv$$

Négation d'une proposition quantifiée

$$Non(\exists x \in E, \quad P(x)) \equiv \forall x \in E, \quad Non(P(x))$$

La négation de : « il existe au moins un garçon dans la classe » est « tous les élèves de la classe sont des filles »

$$Non(\forall x \in E, \quad P(x)) \equiv \exists x \in E, \quad Non(P(x))$$

Négation d'une proposition quantifiée

$$Non(\exists x \in E, \quad P(x)) \equiv \forall x \in E, \quad Non(P(x))$$

La négation de : « il existe au moins un garçon dans la classe » est « tous les élèves de la classe sont des filles »

$$Non(\forall x \in E, \quad P(x)) \equiv \exists x \in E, \quad Non(P(x))$$

La négation de : « tous les élèves de la classe sont des filles » est « il existe au moins un garçon dans la classe »

Négation d'une proposition quantifiée

On peut résumer ceci en

$$Non(\forall) \equiv \exists$$

$$Non(\exists) \equiv \forall$$

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace le quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

Seulement deux quantificateurs ?

On a vu qu'il n'y avait que deux quantificateurs : l'existentiel (au moins un...) et universel (tout le monde). C'est un peu sommaire, mais ces deux seuls quantificateurs permettent de traduire tout le reste.

Par exemple, on peut avoir envie de dire «aucun» :
«Aucun x ne vérifie la propriété $P(x)$»
se traduit par :

Seulement deux quantificateurs ?

On a vu qu'il n'y avait que deux quantificateurs : l'existentiel (au moins un...) et universel (tout le monde). C'est un peu sommaire, mais ces deux seuls quantificateurs permettent de traduire tout le reste.

Par exemple, on peut avoir envie de dire «aucun» :
«Aucun x ne vérifie la propriété $P(x)$»
se traduit par :

$$\forall x, \quad Non(P(x))$$

Attention : le contraire de "tous" ce n'est pas "aucun" ; surtout pas !

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E,$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F,$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E,$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F,$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E,$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E, \exists y \in F,$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Négation de deux proposition quantifiées

Pour nier une proposition quantifiée, on remplace, *dans l'ordre*, chaque quantificateur par l'autre, puis on prend la négation de la proposition finale.

$$Non(\forall x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\forall x \in E, \exists y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \exists x \in E, \forall y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

$$Non(\exists x \in E, \forall y \in F, \quad P(x,y)) \equiv \forall x \in E, \exists y \in F, \quad Non(P(x,y))$$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv$$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$

C'est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ qui est vrai : prendre $x = 0$ par exemple.

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$

C'est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ qui est vrai : prendre $x = 0$ par exemple.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ ou } y < x) \equiv$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$

C'est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ qui est vrai : prendre $x = 0$ par exemple.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ ou } y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ x \geq y \text{ et } y \geq x \equiv$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$

C'est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ qui est vrai : prendre $x = 0$ par exemple.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ ou } y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ x \geq y \text{ et } y \geq x \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ x = y$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

C'est $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ qui est vrai : tout carré d'un réel est positif ou nul.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1) \equiv \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$

C'est $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 1$ qui est vrai : prendre $x = 0$ par exemple.

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ ou } y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ x \geq y \text{ et } y \geq x \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ x = y$

C'est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ x = y$ qui est vrai : prendre $x = 2$ et $y = 2$ par exemple.

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv$$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \text{ ou } y \geq x$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \text{ ou } y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \text{ ou } y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

$Non(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \ y < x) \equiv$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \text{ ou } y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

$Non(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \ y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$ et $y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

$Non(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \ y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$

C'est $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$ qui est vrai : $x = 0$ est dans $\mathbb{N}$ et vérifie : $\forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq 0$.

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y$ et $y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

$Non(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \ y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$

C'est $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$ qui est vrai : $x = 0$ est dans $\mathbb{N}$ et vérifie : $\forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq 0$.

$Non(\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \leq x) \equiv$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \text{ ou } y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

$Non(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \ y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$

C'est $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$ qui est vrai : $x = 0$ est dans $\mathbb{N}$ et vérifie : $\forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq 0$.

$Non(\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \leq x) \equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \ y > x$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ x < y \text{ et } y < x) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y \text{ ou } y \geq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$ ou $y \geq x$ qui est vrai : pour tout réel x et tout réel y, on peut dire que l'un des deux est spérieur ou égal à l'autre.

$Non(\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \ y < x) \equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$

C'est $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq x$ qui est vrai : $x = 0$ est dans $\mathbb{N}$ et vérifie : $\forall y \in \mathbb{N},\ \ y \geq 0$.

$Non(\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \ y \leq x) \equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \ y > x$

C'est $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \ y > x$ qui est vrai : pour tout $x \in \mathbb{N}$ on

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0 \Longrightarrow x = 0) \equiv$$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0 \Longrightarrow x = 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0 \text{ et } x \neq 0$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad xy = 0 \Longrightarrow x = 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\quad xy = 0 \text{ et } x \neq 0$

C'est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\quad xy = 0 \text{ et } x \neq 0$ qui est vrai :
$\exists x = 2 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R},\quad xy = 0 \text{ et } x \neq 0.$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0 \Longrightarrow x = 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$

C'est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$ qui est vrai :
$\exists x = 2 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$.

$Non(\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \ y > x) \equiv$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0 \Longrightarrow x = 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$

C'est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$ qui est vrai :
$\exists x = 2 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$.

$Non(\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \ y > x) \equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \ y \leq x$

Exercice : Exprimer un équivalent logique de ces propositions et déterminer laquelle est vraie :

$Non(\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0 \Longrightarrow x = 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$

C'est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$ qui est vrai : $\exists x = 2 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R},\ \ xy = 0$ et $x \neq 0$.

$Non(\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \ y > x) \equiv \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \ y \leq x$

C'est $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \ y \leq x$ qui est vrai : pour tout $x \in \mathbb{N}$ on peut trouver $y = x$ tel que $y \in \mathbb{N}$ et $y \leq x$.

Unicité

On dit qu'un élément vérifiant une propriété P (c'est à dire rendant la propriété vraie) est unique dans E si deux éléments de E vérifiant P sont forcément égaux, autrement dit :

$$\boxed{\text{Unicité}} \qquad \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (P(x) \text{ et } P(y)) \Longrightarrow x = y$$

Attention : L'unicité n'implique pas l'existence.
Lorsqu'il y a unicité, c'est qu'on ne peut pas avoir plusieurs éléments vérifiant la propriété, autrement dit, il y a au plus un élément vérifiant la propriété. Il peut donc y avoir un unique élément vérifiant la propriété ou bien ne pas y en avoir du tout !

EXEMPLE : si f est une fonction strictement monotone alors si elle s'annule, c'est en un unique point; on peut écrire : « Si

Existence et unicité

Il est très fréquent en mathématiques que l'on ait à prouver l'existence et l'unicité d'un élément x dans E vérifiant une propriété $P(x)$.

Existence et unicité

Il est très fréquent en mathématiques que l'on ait à prouver l'existence et l'unicité d'un élément x dans E vérifiant une propriété $P(x)$. On note souvent cela comme suit :

$$\exists!\, x \in E,\ P(x)$$

Existence et unicité

Il est très fréquent en mathématiques que l'on ait à prouver l'existence et l'unicité d'un élément x dans E vérifiant une propriété $P(x)$. On note souvent cela comme suit :

$$\exists!\, x \in E,\ P(x)$$

Pour démontrer cela, on procède la plupart du temps en **deux étapes** : on démontre l'existence **et** l'unicité.

Souvent d'ailleurs, on commence par démontrer l'unicité, puis l'existence. (cf raisonnement par analyse-synthèse dans le prochain paragraphe)

Plan

1. Histoire de la logique

2. Propositions et connecteurs logiques

3. Quantificateurs logiques

4. Divers types de démonstrations
   - Implication
   - Contraposée
   - Démonstration par l'absurde
   - Démonstration d'une équivalence
   - Raisonnement par disjonction des cas

Démonstration par raisonnement direct

Il utilise la règle suivante :

Si H est vraie et $(H \Rightarrow C)$ est vraie, alors C est vraie.

Démonstration par raisonnement direct

Il utilise la règle suivante :

Si H est vraie et $(H \Rightarrow C)$ est vraie, alors C est vraie.

Ce raisonnement a été popularisé par :
Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Démonstration par raisonnement direct

Il utilise la règle suivante :

Si H est vraie et $(H \Rightarrow C)$ est vraie, alors C est vraie.

Ce raisonnement a été popularisé par :
Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Un *sophisme* est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité. Exemple "classique" :
Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.

Démonstration par raisonnement direct

Il utilise la règle suivante :

Si H est vraie et $(H \Rightarrow C)$ est vraie, alors C est vraie.

Ce raisonnement a été popularisé par :
Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel.

Un *sophisme* est un raisonnement faux ayant une apparence de vérité. Exemple "classique" :
Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.

Un *paradoxe* est, lui, un raisonnement ou un fait exact, qui paraît faux de prime abord.

Démonstration directe d'une implication

On veut démontrer que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Démonstration directe d'une implication

On veut démontrer que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Rédaction : Supposons P, et démontrons Q.
[*arguments, raisonnements,...*]
Donc on a Q ; et l'implication souhaitée est vraie.

Démonstration directe d'une implication

EXEMPLE : Montrer que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

DÉMONSTRATION :

Démonstration directe d'une implication

EXEMPLE : Montrer que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel pair.

Démonstration directe d'une implication

EXEMPLE : Montrer que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel pair.

n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

Démonstration directe d'une implication

EXEMPLE : Montrer que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel pair.

n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.

Démonstration directe d'une implication

EXEMPLE : Montrer que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel pair.
n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Et $k^2 \in \mathbb{N}$ donc n^2 est un multiple de 4.

Démonstration directe d'une implication

EXEMPLE : Montrer que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel pair.
n est pair donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Et $k^2 \in \mathbb{N}$ donc n^2 est un multiple de 4.
Par conséquent, on a montré que le carré d'un entier naturel pair est un multiple de 4.

Démonstration d'une implication par contraposée

On veut là-encore démontrer que l'implication $P \implies Q$ est vraie. Pour cela, on sait que cette implication est équivalente à sa contraposée $Non(Q) \implies Non(P)$.

Démonstration d'une implication par contraposée

On veut là-encore démontrer que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie. Pour cela, on sait que cette implication est équivalente à sa contraposée $Non(Q) \Longrightarrow Non(P)$.

Rédaction :

Montrons $P \Longrightarrow Q$ par contraposée : montrons $Non(Q) \Longrightarrow Non(P)$.

Supposons $Non(Q)$, et démontrons $Non(P)$.

[*arguments, raisonnements,...*]

Donc on a $Non(P)$.

D'où : $[Non(Q) \Longrightarrow Non(P)]$.

Donc $[P \Longrightarrow Q]$ par contraposée.

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION :

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel.
Montrons n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair par contraposée : montrons n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel.
Montrons n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair par contraposée : montrons n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.
Supposons donc n impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel.
Montrons n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair par contraposée : montrons n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.
Supposons donc n impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 =$

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel.
Montrons n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair par contraposée : montrons n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.
Supposons donc n impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$,
avec $k' = 2k^2 + 2k$; $k' \in \mathbb{N}$.

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel.

Montrons n^2 pair $\Longrightarrow n$ pair par contraposée : montrons n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.

Supposons donc n impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

Alors

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$; $k' \in \mathbb{N}$.

$n^2 = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$ donc n^2 est impair.

Démonstration d'une implication par contraposée

EXEMPLE : Démontrer qu'étant donné un entier naturel n, si n^2 est pair, alors n est pair.

DÉMONSTRATION : Soit n un entier naturel.
Montrons n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair par contraposée : montrons n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.
Supposons donc n impair. Alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors
$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$,
avec $k' = 2k^2 + 2k$; $k' \in \mathbb{N}$.
$n^2 = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$ donc n^2 est impair.
On vient de prouver que n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair. Donc par contraposée, n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair.

Démonstration par l'absurde

Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit :
"Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres."

Démonstration par l'absurde

Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit :
"Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres."
Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi.
En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres...

Démonstration par l'absurde

Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit :
"Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres."
Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi.
En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres...
Pierre est-il venu ?

Démonstration par l'absurde

Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit :
"Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres."
Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi.
En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres...
Pierre est-il venu ?
Si on suppose que Pierre est venu, il a laissé un mot. Or je n'ai pas trouvé de mot. Donc il y a une contradiction.
Donc Pierre n'est pas venu.

Démonstration par l'absurde

Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit :
"Je passerai peut être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres."
Or, j'ai été obligé de sortir lundi après-midi.
En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres...
Pierre est-il venu ?
Si on suppose que Pierre est venu, il a laissé un mot. Or je n'ai pas trouvé de mot. Donc il y a une contradiction.
Donc Pierre n'est pas venu.
On a raisonné par l'absurde : on a montré que l'hypothèse "Pierre est venu" conduit à une contradiction (cf premier principe d'Aristote).

Démonstration par l’absurde

On parle de démonstration par l’absurde quand la conclusion affirme la vérité d’une proposition, non en l’établissant directement par une démonstration,

Démonstration par l’absurde

On parle de démonstration par l’absurde quand la conclusion affirme la vérité d’une proposition, non en l’établissant directement par une démonstration, mais indirectement,

Démonstration par l’absurde

On parle de démonstration par l’absurde quand la conclusion affirme la vérité d’une proposition, non en l’établissant directement par une démonstration, mais indirectement, en faisant voir que la proposition contraire est absurde, c’est à dire conduit à une contradiction manifeste.

Démonstration par l'absurde

On parle de démonstration par l'absurde quand la conclusion affirme la vérité d'une proposition, non en l'établissant directement par une démonstration, mais indirectement, en faisant voir que la proposition contraire est absurde, c'est à dire conduit à une contradiction manifeste.

Exemple de démonstration par l'absurde

Montrons par l'absurde qu' « il n'y a pas de plus petit nombre rationnel strictement plus grand que 0 ».

Supposons qu'il existe un plus petit nombre rationnel strictement positif, disons r_0.

Maintenant soit $x = \frac{r_0}{2}$. Alors x est un nombre rationnel, x est strictement plus grand que 0 et x est strictement plus petit que r_0.

Mais cela est absurde - contradictoire avec notre hypothèse initiale que r_0 était le plus petit nombre rationnel strictement positif.

Ainsi nous pouvons conclure que la proposition d'origine est nécessairement vraie : il n'y a pas de plus petit nombre rationnel strictement plus grand que 0.

Il n'est pas rare d'utiliser ce type d'argument avec des propositions telles que celle ci-dessus, pour démontrer la non-existence de quelque objet mathématique. Nous supposons que de tels objets existent et ensuite nous démontrons que cela nous mène à une contradiction ; ainsi, de tels objets n'existent pas.

Il n’est pas rare d’utiliser ce type d’argument avec des propositions telles que celle ci-dessus, pour démontrer la non-existence de quelque objet mathématique. Nous supposons que de tels objets existent et ensuite nous démontrons que cela nous mène à une contradiction ; ainsi, de tels objets n’existent pas.
Autre exemple : la somme d’un rationnel et d’un irrationnel est un irrationnel.

Il n’est pas rare d’utiliser ce type d’argument avec des propositions telles que celle ci-dessus, pour démontrer la non-existence de quelque objet mathématique. Nous supposons que de tels objets existent et ensuite nous démontrons que cela nous mène à une contradiction ; ainsi, de tels objets n’existent pas.

Autre exemple : la somme d’un rationnel et d’un irrationnel est un irrationnel.

Autre exemple : le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Il n'est pas rare d'utiliser ce type d'argument avec des propositions telles que celle ci-dessus, pour démontrer la non-existence de quelque objet mathématique. Nous supposons que de tels objets existent et ensuite nous démontrons que cela nous mène à une contradiction ; ainsi, de tels objets n'existent pas.
Autre exemple : la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
Autre exemple : le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.
il existe un nombre infini de nombres premiers.

Démonstration d'une implication par l'absurde

On veut démontrer que l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie en démontrant que sa négation est fausse : On montre qu'il est impossible d'avoir à la fois P et $\neg Q$.

Démonstration d'une implication par l'absurde

On veut démontrer que l'implication $P \implies Q$ est vraie en démontrant que sa négation est fausse : On montre qu'il est impossible d'avoir à la fois P et $\neg Q$.

Rédaction : Montrons $[P \implies Q]$ par l'absurde :
Supposons P et $Non(Q)$.
[*arguments, raisonnements,...*]
Impossible.
Donc $[P \implies Q]$.

Démonstration d'une implication par l'absurde

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

Démonstration d'une implication par l'absurde

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

On veut donc montrer que $x \neq -2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Démonstration d'une implication par l'absurde

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

On veut donc montrer que $x \neq -2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1.$

Par l'absurde : si $x \neq -2$ et $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ alors

Démonstration d'une implication par l'absurde

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

On veut donc montrer que $x \neq -2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Par l'absurde : si $x \neq -2$ et $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ alors

$\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ implique $x+1 = x+2$

Démonstration d'une implication par l'absurde

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

On veut donc montrer que $x \neq -2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Par l'absurde : si $x \neq -2$ et $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ alors $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ implique $x+1 = x+2$ donc $1 = 2$.
Contradiction.

Démonstration d'une implication par l'absurde

Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2 on a : $\dfrac{x+1}{x+2}$ différent de 1.

On veut donc montrer que $x \neq -2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Par l'absurde : si $x \neq -2$ et $\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ alors

$\dfrac{x+1}{x+2} = 1$ implique $x+1 = x+2$ donc $1 = 2$.

Contradiction.

Donc on conclue que $x \neq -2 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

absurde vs contraposée

Remarque : parfois on peut transformer une démonstration d'une implication par l'absurde par un raisonnement par contraposée : on montre que $Non(Q)$ implique $Non(P)$. La formulation est différente mais l'idée directrice reste néanmoins la même. Seule change la rédaction.

Raisonnement par équivalence

On rencontre principalement ces raisonnements dans deux cas :

Raisonnement par équivalence

On rencontre principalement ces raisonnements dans deux cas :

- Pour résoudre une équation.

Raisonnement par équivalence

On rencontre principalement ces raisonnements dans deux cas :

- Pour résoudre une équation.

- Pour faire la démonstration d'une équivalence.

Raisonnement par équivalence

Pour résoudre une équation, on essaye le plus souvent de raisonner par équivalence.

Raisonnement par équivalence

Pour résoudre une équation, on essaye le plus souvent de raisonner par équivalence.

$$3x + 2 = x + 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Raisonnement par équivalence

Pour résoudre une équation, on essaye le plus souvent de raisonner par équivalence.

$$3x + 2 = x + 4 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

l'avantage d'une résolution par équivalence, c'est que l'on n'a pas besoin de faire la réciproque.

Raisonnement par équivalence

Pour faire la démonstration d'une équivalence, on raisonne presque toujours par **double implication** :

Raisonnement par équivalence

Pour faire la démonstration d'une équivalence, on raisonne presque toujours par **double implication** :

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on montre que $P \Rightarrow Q$ puis que $Q \Rightarrow P$.

Raisonnement par équivalence

Pour faire la démonstration d'une équivalence, on raisonne presque toujours par **double implication** :

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on montre que $P \Rightarrow Q$ puis que $Q \Rightarrow P$.

Exemple :
Montrer que $ABCD$ carré si, et seulement si, $ABCD$ rectangle et $ABCD$ losange.

Raisonnement par équivalence

Pour faire la démonstration d'une équivalence, on raisonne presque toujours par **double implication** :

Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on montre que $P \Rightarrow Q$ puis que $Q \Rightarrow P$.

Exemple :
Montrer que $ABCD$ carré si, et seulement si, $ABCD$ rectangle et $ABCD$ losange.
On montre que :
- $ABCD$ carré implique ($ABCD$ rectangle et $ABCD$ losange)
- ($ABCD$ rectangle et $ABCD$ losange) implique $ABCD$ carré

Disjonction des cas

Principe : on sait que H est équivalente à H_1 ou bien H_2 ou bien ... ou bien H_n,

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} H_1 \Rightarrow C \\ H_2 \Rightarrow C \\ \quad \cdots \\ H_n \Rightarrow C \end{array} \right. \quad \text{alors } H \Rightarrow C.$$

Disjonction des cas

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$.

On raisonne par disjonction des cas :

Disjonction des cas

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$.

On raisonne par disjonction des cas :

- Premier cas : $x > 0$

le produit de deux nombres positifs est positif. Donc $x^2 \geq 0$.

Disjonction des cas

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$.
On raisonne par disjonction des cas :
- Premier cas : $x > 0$
le produit de deux nombres positifs est positif. Donc $x^2 \geq 0$.
- Deuxième cas : $x = 0$
si $x = 0$ alors $x^2 = 0$, et donc $x^2 \geq 0$.

Disjonction des cas

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$.
On raisonne par disjonction des cas :
- Premier cas : $x > 0$
le produit de deux nombres positifs est positif. Donc $x^2 \geq 0$.
- Deuxième cas : $x = 0$
si $x = 0$ alors $x^2 = 0$, et donc $x^2 \geq 0$.
- Troisième cas : $x < 0$
le produit de deux nombres négatifs est positif. Donc $x^2 \geq 0$.

Disjonction des cas

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$.
On raisonne par disjonction des cas :
- Premier cas : $x > 0$
le produit de deux nombres positifs est positif. Donc $x^2 \geq 0$.
- Deuxième cas : $x = 0$
si $x = 0$ alors $x^2 = 0$, et donc $x^2 \geq 0$.
- Troisième cas : $x < 0$
le produit de deux nombres négatifs est positif. Donc $x^2 \geq 0$.

Dans tous les cas, on a obtenu que $x^2 \geq 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } x^2 \geq 0$$

Démonstration de l'unicité

On veut démontrer l'unicité d'un élément x vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ (sans pour autant s'assurer de l'existence).

Démonstration de l'unicité

On veut démontrer l'unicité d'un élément x vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ (sans pour autant s'assurer de l'existence).

Rédaction : Soient x et y vérifiant $\mathcal{P}$
[*arguments, raisonnements,...*]
Donc $x = y$.
Ainsi, s'il existe un x vérifiant $\mathcal{P}$, il est unique.

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION :

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Par définition, f est strictement croissante sur I donc $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Par définition, f est strictement croissante sur I donc $\forall (a,b) \in I^2$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Donc f vérifie la contraposée $(\star)$: $\forall (a,b) \in I^2$, $f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$.

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Par définition, f est strictement croissante sur I donc $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Donc f vérifie la contraposée $(\star)$: $\forall (a,b) \in I^2, f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$.

Supposons que x et y sont dans I et vérifient $f(x) = 0$ et $f(y) = 0$.

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Par définition, f est strictement croissante sur I donc $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Donc f vérifie la contraposée $(\star)$: $\forall (a,b) \in I^2, f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$.

Supposons que x et y sont dans I et vérifient $f(x) = 0$ et $f(y) = 0$.

Puisque x et y sont dans I et vérifient $f(x) = f(y) = 0$, on a donc $f(x) \geq f(y)$ et donc $x \geq y$ d'après $(\star)$.

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Par définition, f est strictement croissante sur I donc $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Donc f vérifie la contraposée $(\star)$: $\forall (a,b) \in I^2, f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$.

Supposons que x et y sont dans I et vérifient $f(x) = 0$ et $f(y) = 0$.

Puisque x et y sont dans I et vérifient $f(x) = f(y) = 0$, on a donc $f(x) \geq f(y)$ et donc $x \geq y$ d'après $(\star)$.

Puisque y et x sont dans I et vérifient $f(y) = f(x) = 0$, on a

Démonstration de l'unicité

EXEMPLE : unicité du zéro d'une fonction strictement monotone.

DÉMONSTRATION : Supposons f strictement monotone sur un intervalle I. Et faisons la démonstration pour f strictement croissante (le cas de f strictement décroissante se fait de façon semblable).

Par définition, f est strictement croissante sur I donc $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$. Donc f vérifie la contraposée $(\star)$: $\forall (a,b) \in I^2, f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$.

Supposons que x et y sont dans I et vérifient $f(x) = 0$ et $f(y) = 0$.

Puisque x et y sont dans I et vérifient $f(x) = f(y) = 0$, on a donc $f(x) \geq f(y)$ et donc $x \geq y$ d'après $(\star)$.

Puisque y et x sont dans I et vérifient $f(y) = f(x) = 0$, on a

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

On procède en deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

On procède en deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

1. 1er temps : ANALYSE (ou condition nécessaire)
   On suppose qu'un x vérifiant $P(x)$ existe et on le détermine (de façon unique) en fonction des données du problème. Disons schématiquement que l'on aboutit à $x = f(données)$.

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

On procède en deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

1. 1^{er} temps : ANALYSE (ou condition nécessaire)
   On suppose qu'un x vérifiant $P(x)$ existe et on le détermine (de façon unique) en fonction des données du problème. Disons schématiquement que l'on aboutit à $x = f(données)$.

   Ce premier temps démontre l'UNICITE de x, mais pas son existence (cette méthode peut remplacer la précédente dans la méthode de la preuve d'unicité).

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

On procède en deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

1. 1^{er} temps : ANALYSE (ou condition nécessaire)
   On suppose qu'un x vérifiant $P(x)$ existe et on le détermine (de façon unique) en fonction des données du problème. Disons schématiquement que l'on aboutit à $x = f(données)$.

   Ce premier temps démontre l'UNICITE de x, mais pas son existence (cette méthode peut remplacer la précédente dans la méthode de la preuve d'unicité).
2. 2^{me} temps : SYNTHESE (ou condition suffisante)

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

On procède en deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

1. 1^{er} temps : ANALYSE (ou condition nécessaire)
   On suppose qu'un x vérifiant $P(x)$ existe et on le détermine (de façon unique) en fonction des données du problème. Disons schématiquement que l'on aboutit à $x = f(données)$.

   Ce premier temps démontre l'UNICITE de x, mais pas son existence (cette méthode peut remplacer la précédente dans la méthode de la preuve d'unicité).
2. 2^{me} temps : SYNTHESE (ou condition suffisante)
   On pose $x = f(données)$, où f a été définie pendant

Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit de démontrer un énoncé du type : «il existe un unique x vérifiant $P(x)$.»

On procède en deux étapes : l'analyse puis la synthèse.

1. 1^{er} temps : ANALYSE (ou condition nécessaire)
   On suppose qu'un x vérifiant $P(x)$ existe et on le détermine (de façon unique) en fonction des données du problème. Disons schématiquement que l'on aboutit à $x = f(données)$.

   Ce premier temps démontre l'UNICITE de x, mais pas son existence (cette méthode peut remplacer la précédente dans la méthode de la preuve d'unicité).
2. 2^{me} temps : SYNTHESE (ou condition suffisante)
   On pose $x = f(données)$, où f a été définie pendant

Exemple d'analyse-synthèse

EXEMPLE : Toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

DÉMONSTRATION :

Exemple d'analyse-synthèse

EXEMPLE : Toute fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

DÉMONSTRATION :

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$; on veut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un entier n_0 fixé.

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$; on veut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un entier n_0 fixé.

Exemple de proposition :
pour tout entier $n \geq 1$, la somme de tous les entiers $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$; on veut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un entier n_0 fixé.

Exemple de proposition :
pour tout entier $n \geq 1$, la somme de tous les entiers $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

La proposition est $P(n)$: " $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "
Cette proposition est, d'après l'énoncé, vraie à partir de $n_0 = 1$.

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$; on veut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un entier n_0 fixé.

Exemple de proposition :
pour tout entier $n \geq 1$, la somme de tous les entiers $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

La proposition est $P(n)$: " $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "
Cette proposition est, d'après l'énoncé, vraie à partir de $n_0 = 1$.
Pour démontrer ce résultat, on pourrait le vérifier pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...

Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer ce résultat, on pourrait le vérifier pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...
mais cela veut dire qu'il faudrait le vérifier pour une infinité d'entiers...

Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer ce résultat, on pourrait le vérifier pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...

mais cela veut dire qu'il faudrait le vérifier pour une infinité d'entiers...

ce qui n'est pas possible faute de temps

et qui n'est pas non plus possible du fait que les entiers sont en nombre infini...

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$; on veut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un entier n_0 fixé.

On va donc utiliser une méthode déductive appelée

raisonnement par récurrence

Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$; on veut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un entier n_0 fixé.

On va donc utiliser une méthode déductive appelée

raisonnement par récurrence

il existe des récurrences "simples", des récurrences doubles et pour généraliser des récurrences fortes.

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \quad [\,[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie]

alors

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \quad [\,[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie $]$

alors

3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.
Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \quad [\,[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie $]$

alors

3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \quad [\,[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie $]$

alors

3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Variante : Si

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.
Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \quad [\,[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie $]$

alors

3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Variante : Si

1. (*initialisation*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 + 1 \quad [\,[P(n-1) \Longrightarrow P(n)]$ est vraie $]$

alors

Récurrence "simple"

Soit $P(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et soit n_0 un entier naturel à partir duquel la propriété est vraie.

Principe d'une démonstration par récurrence : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \quad [\,[P(n) \Longrightarrow P(n+1)]$ est vraie $]$

alors

3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Variante : Si

1. (*initialisation*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 + 1 \quad [\,[P(n-1) \Longrightarrow P(n)]$ est vraie $]$

alors

3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Exemple de démonstration par récurrence (1/3)

Voici un énoncé d’exercice faisant appel à une démonstration par récurrence :

Exemple de démonstration par récurrence (1/3)

Voici un énoncé d'exercice faisant appel à une démonstration par récurrence :

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a :
$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple de démonstration par récurrence (1/3)

Démonstration :

Exemple de démonstration par récurrence (1/3)

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notons P_n la propriété : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple de démonstration par récurrence (1/3)

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Notons P_n la propriété : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Initialisation :

Exemple de démonstration par récurrence (1/3)

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Notons P_n la propriété : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Initialisation :

La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$?

$\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

- Hérédité :

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

- Hérédité :

Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a :

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; montrons alors que

$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a :

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; montrons alors que

$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = [1 + 2 + \cdots + n] + (n+1)$$

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a :

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; montrons alors que

$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = [1 + 2 + \cdots + n] + (n+1)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a :

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; montrons alors que

$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = [1 + 2 + \cdots + n] + (n+1)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Donc

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

...

Donc

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

...

Donc

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

De plus, on a :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Exemple de démonstration par récurrence (2/3)

...
Donc

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

De plus, on a :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc on a $1 + 2 + \cdots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ et P_{n+1} est vraie.

Exemple de démonstration par récurrence (3/3)

- Conclusion :

Exemple de démonstration par récurrence (3/3)

• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et P_n est héréditaire.

Exemple de démonstration par récurrence (3/3)

• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et P_n est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Exemple de démonstration par récurrence (3/3)

• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et P_n est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.
C'est à dire : pour tout n entier, $n \geq 1$,
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Récurrence double

Principe d'une récurrence double : Si

Récurrence double

Principe d'une récurrence double : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies

Récurrence double

Principe d'une récurrence double : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0 \ \ [[P(n)$ et $P(n+1)] \Longrightarrow P(n+2)]$ est vraie

alors

Récurrence double

Principe d'une récurrence double : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies
2. (*hérédité :*) $\forall n \geq n_0\ \ [[P(n)$ et $P(n+1)] \Longrightarrow P(n+2)]$ est vraie

alors

3. (*conclusion :*)$\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Récurrence double

EXEMPLE : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

alors on peut montrer par une récurrence double que «pour tout entier n on a $u_n = n$»

Récurrence double

EXEMPLE : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

alors on peut montrer par une récurrence double que «pour tout entier n on a $u_n = n$»

Remarque : puisque la relation de récurrence définissant la suite (u_n) est double, s'il faut faire une démonstration par récurrence, elle sera nécessairement double.

Exemple de démonstration par récurrence double (1/3)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n$.

Démonstration :

Exemple de démonstration par récurrence double (1/3)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n$.

Démonstration :

Montrons par une récurrence double que pour tout n entier, $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$. Notons P_n la propriété : $u_n = n$.

Exemple de démonstration par récurrence double (1/3)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n$.

Démonstration :

Montrons par une récurrence double que pour tout n entier, $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$. Notons P_n la propriété : $u_n = n$.

• Initialisation :

Exemple de démonstration par récurrence double (1/3)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n$.

Démonstration :

Montrons par une récurrence double que pour tout n entier, $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$. Notons P_n la propriété : $u_n = n$.

• Initialisation :

Les propriétés P_0 et P_1 sont-elles vraies ? A-t-on $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$?

Par définition, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc les propriétés P_0 et P_1 sont vraies.

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

- Hérédité :

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$;

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$; montrons alors que $u_{n+2} = n + 2$.

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$; montrons alors que $u_{n+2} = n + 2$.

On a par définition de la suite : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$; montrons alors que $u_{n+2} = n + 2$.

On a par définition de la suite : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$.

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$; montrons alors que $u_{n+2} = n + 2$.

On a par définition de la suite : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
Or d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$.
Donc

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) - n = n + 2$$

Exemple de démonstration par récurrence double (2/3)

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$; montrons alors que $u_{n+2} = n + 2$.

On a par définition de la suite : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = n$ et $u_{n+1} = n + 1$.

Donc

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) - n = n + 2$$

Donc on a $u_{n+2} = n + 2$, et P_{n+2} est vraie.

Exemple de démonstration par récurrence double (3/3)

- Conclusion :

Exemple de démonstration par récurrence double (3/3)

- Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et est héréditaire.

Exemple de démonstration par récurrence double (3/3)

• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et est héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple de démonstration par récurrence double (3/3)

• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ et est héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout n entier, $n \in \mathbb{N}$, $\qquad u_n = n$.

Récurrence forte

Parfois, pour la partie "hérédité" du raisonnement par récurrence, on doit supposer que $P(k)$ est déjà vraie pour tous les entiers k compris entre n_0 (point de départ) et n avant de pouvoir démontrer que $P(n+1)$ est vraie.

Récurrence forte

Parfois, pour la partie "hérédité" du raisonnement par récurrence, on doit supposer que $P(k)$ est déjà vraie pour tous les entiers k compris entre n_0 (point de départ) et n avant de pouvoir démontrer que $P(n+1)$ est vraie.

Pour la récurrence double, on s'appuyait sur deux résultats acquis avant de conclure que le suivant était vrai. Là il faut s'appuyer sur le fait que c'est vrai pour tous ceux qui précèdent. D'où le nom de récurrence forte.

Récurrence forte

Principe : Si

Récurrence forte

Principe : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie

Récurrence forte

Principe : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*)

   $\forall n \geq n_0$

   [[$\forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k \leq n,\ P(k)$ vraie] $\Longrightarrow P(n+1)$ est vraie]

Récurrence forte

Principe : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*)

   $\forall n \geq n_0$

   [$[\forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k \leq n,\ P(k)$ vraie] $\Longrightarrow P(n+1)$ est vraie]

   alors

Récurrence forte

Principe : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*)
   $\forall n \geq n_0$
   [[$\forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k \leq n,\ P(k)$ vraie] $\Longrightarrow P(n+1)$ est vraie]

   alors
3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

Récurrence forte

Principe : Si

1. (*initialisation :*) $P(n_0)$ est vraie
2. (*hérédité :*)

   $\forall n \geq n_0$

   $[\ [\forall k \in \mathbb{N},\ n_0 \leq k \leq n,\ P(k)$ vraie $] \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie $]$

   alors
3. (*conclusion :*) $\forall n \geq n_0 \quad P(n)$ est vraie.

EXEMPLE : la proposition : «Tout nombre entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier » se démontre par récurrence forte.

Récurrence forte

Cela sert parfois en arithmétique, lorsqu'on raisonne sur des diviseurs.

Cela sert souvent dans la théorie des espaces vectoriels lorsqu'on raisonne par récurrence sur la dimension des espaces vectoriels. Mais ce n'est pas (encore) du niveau TS.