Logique - Condition nécessaire ; condition suffisante

En français comme en mathématiques, on utilise parfois le vocabulaire suivant :

« condition nécessaire »
« condition suffisante »
« condition nécessaire et suffisante »

Ces mots tentent de donner un lien logique entre deux propositions ou propriétés, plus précisément une relation de cause à effet.

EXEMPLE :
Pour avoir mon bac il est nécessaire d'avoir au dessus de 10.
Pour avoir mon bac il suffit d'avoir 18 de moyenne.
Pour avoir les meilleurs places, il est nécessaire d'être classé parmi les 10 premiers à l'examen de sortie de l'ENA.

1°) Condition suffisante

On dit qu'une propriété A suffit à une autre propriété B lorsque, dès que A est réalisée, B l'est aussi. Cela correspond à l'implication mathématique $A \Rightarrow B$. En effet, on a défini l'implication par :

Implication $\Rightarrow$: Relation entre deux propositions telle que l'exactitude de la première entraîne celle de la seconde. Le symbole se note $\Rightarrow$. Une relation « $A \Rightarrow B$ » se traduit en français par « Si A alors B »

EXEMPLE :
« Si x et y sont tous deux négatifs alors $xy \geq 0$ » peut se dire aussi « $x \leq 0$ et $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$ » ou encore « il suffit que x et y soient tous deux négatifs pour que leur produit xy soit positif »
EXEMPLE :
« Pour avoir son bac, il suffit d'avoir 10 de moyenne » est une affirmation exacte
« Pour avoir son bac, il suffit d'avoir au moins 15 de moyenne » est une autre affirmation exacte, mais il ne faut pas croire que la condition « avoir au moins 15 de moyenne » est une condition indispensable.

2°) Condition nécessaire

On dit qu'une propriété C est nécessaire à une autre propriété D lorsque, dès que C n'est pas réalisée, D ne peut pas l'être. Cela correspond à l'implication mathématique $D \Rightarrow C$. En effet, la propriété $D \Rightarrow C$ est équivalente à sa contraposée : $NON(C) \Rightarrow NON(D)$.

EXEMPLE :
« Pour avoir son permis de conduire, il est nécessaire d'avoir son code » signifie que « si je n'ai pas mon code, je ne peux pas avoir mon permis de conduire » ou encore que « si j'ai mon permis alors c'est que j'ai eu mon code » .
EXEMPLE :
« Si je n'ai pas au dessus de 10 alors je n'ai pas mon bac » peut se dire aussi « il est nécessaire d'avoir au moins 10 pour être reçu au bac » ou encore « si j'ai mon bac, c'est que j'ai eu au dessus de 10 de moyenne ».

3°) Condition nécessaire et suffisante, condition équivalente

On dit qu'une propriété A est nécessaire et suffisante à une autre propriété B lorsque A et B sont deux propriétés équivalentes ; on dit aussi que « A est vraie si et seulement si B ».
En effet, A suffit à B donc $A \Rightarrow B$. Et A est nécessaire à B donc $NON(A) \Rightarrow NON(B)$, soit $B \Rightarrow A$. Et par conséquent $A \Longleftrightarrow B$.

EXEMPLE :
« Si x et y sont tous deux de même signe, alors $xy \geq 0$ » et « Si $xy \geq 0$, alors x et y sont tous deux de même signe » donc « $xy \geq 0 \Longleftrightarrow x$ et y sont tous deux de même signe »

REMARQUE : Lorsqu'on dit « A si et seulement si B », on dit deux choses : premièrement « A si B » donc $B \Rightarrow A$; deuxièmement « A seulement si B » donc B est nécessaire à A, et donc $A \Rightarrow B$.

MÉTHODE : raisonnement par double implication ou par condition nécessaire et suffisante ?

Pour montrer que A est vraie si et seulement si (ssi) B est vraie, on peut travailler par double implication en montrant que $A \Rightarrow B$ et que réciproquement $B \Rightarrow A$. On parle de démonstration par implication et réciproque ; cette méthode est à peu de chose près identique à un raisonnement par condition nécessaire et suffisante : logiquement ces deux raisonnements sont équivalents, mais dans la tournure des phrases, on insiste plus sur la relation de dépendance forte entre l'un et l'autre.

4°) Utilisation en mathématiques de condition nécessaire et suffisante

Dans certains raisonnements un peu longs ou délicats en mathématiques, notamment en géométrie, on cherche à résoudre un problème en deux étapes :

• on cherche une condition nécessaire sans laquelle le problème ne peut exister, et on regarde ensuite si cette condition est suffisante ou s'il faut rajouter une ou plusieurs conditions nécessaires supplémentaires.

• on cherche une condition nécessaire sans laquelle le problème ne peut exister, et on raisonne alors par équivalence, moyennant cette condition.

• on cherche d'abord une condition suffisante puis on cherche à affiner pour voir si dans un cas plus large la relation ne pouvait pas aussi avoir lieu.

EXEMPLE : Si A et B sont deux points donnés, on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point I soit le milieu du segment $[AB]$.
• Méthode : on cherche une condition nécessaire sans laquelle le problème ne peut exister, et on regarde ensuite si cette condition est suffisante ou s'il faut rajouter une ou plusieurs conditions nécessaires supplémentaires.

• Solution :
Condition nécessaire n°1 : I doit être aligné avec A et B.
Mais cette condition n'est manifestement pas suffisante.
Condition nécessaire n°2 : I doit être à la même distance de A et de B.
Et on voit que ces deux conditions nécessaires mises ensemble deviennent suffisantes : si I est équidistant de A et B, alors I est sur la médiatrice de $[AB]$. Si de plus A, I et B sont alignés, alors I est à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la droite (AB). I est donc le milieu de $[AB]$.

$$\text{On a donc « } I \text{ milieu de } [AB] \text{ »} \iff \left| \begin{array}{l} \text{« } I \text{ est équidistant de } A \text{ et } B \text{ »} \\ \text{et} \\ \text{« les points } A,\ I \text{ et } B \text{ sont alignés »} \end{array} \right.$$

EXEMPLE : Si A, B et C sont trois points distincts donnés, on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M soit à la même distance des trois points A, B et C.
• Méthode : on cherche une condition nécessaire sans laquelle le problème ne peut exister, et on regarde ensuite si cette condition est suffisante ou s'il faut rajouter une ou plusieurs conditions nécessaires supplémentaires.

• Solution :
On se dit que si la condition « M est à la même distance des trois points A, B et C » est réalisée alors forcément $AM = MB$ et donc M est équidistant des points A et B. Le point M est donc situé sur la médiatrice du segment $[AB]$.
Par conséquent, cette condition « M est situé sur la médiatrice du segment $[AB]$ » est une condition nécessaire.
On a donc une infinité de points qui peuvent être solution : tous les points de la médiatrice du segment $[AB]$.
Mais on peut faire le même raisonnement pour les points B et C, donc la condition « M est situé sur la médiatrice du segment $[BC]$ » est une autre condition nécessaire. Et le même raisonnement pour les points A et C, donc la condition « M est situé sur la médiatrice du segment $[AC]$ » est une autre condition nécessaire.
Une condition nécessaire est donc que M soit le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC.
La condition « M est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC » est une condition suffisante à M équidistant des points A, B et C car on sait alors que si M est le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC alors M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et M a la propriété souhaitée.

EXEMPLE :
Trouver des conditions équivalentes portant sur x et y pour que $xy \geq 1$.
• Méthode : Commencer par trouver des conditions nécessaires.

• Solution :
Si on cherche des conditions sur x et y pour que $xy \geq 1$ alors on peut se dire que si $xy = 1$ alors le produit xy est positif, et donc x et y sont de même signe. La condition « x et y sont de même signe » est donc une condition nécessaire.
Mais elle n'est pas suffisante car $x = y = 0,1$ ne vérifient pas $xy = 1$.
Mais on a déjà une idée : on découpe le problème en deux cas : premier cas x et y sont tous deux positifs ; second cas, x et y sont tous deux négatifs.
Si x et y sont tous deux positifs alors $xy \geq 1 \iff y \geq \frac{1}{x}$. Et si x et y sont tous deux négatifs alors $xy \geq 1 \iff y \leq \frac{1}{x}$. Et on a donc l'équivalence suivante :

$$xy \geq 1 \iff \left| \begin{array}{l} x \geq 0 \text{ et } y \geq \frac{1}{x} \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \text{ et } y \leq \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

EXEMPLE :
Résoudre l'équation $x^3 + x^2 - 2 = 0$.
• Méthode : on cherche d'abord une condition suffisante puis on cherche à affiner pour voir si dans un cas plus large la relation ne pouvait pas aussi avoir lieu.

• Solution :
On veut résoudre l'équation $x^3 + x^2 - 2 = 0$. On s'aperçoit que $x = 1$ est une solution de cette équation. La condition « $x = 1$ » est donc une condition suffisante.
On peut alors factoriser le polynôme par $x - 1$: $x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ donc $x^3 + x^2 - 2 = 0$ ssi $x = 1$ ou $x^2 + 2x + 2 = 0$. Mais ce polynôme ne s'annule pas car il a un discriminant négatif.
Conclusion : il y a une unique solution : $x = 1$.

EXEMPLE :
Résoudre l'équation $\sqrt{x+3} = x + 1$.
• Méthode : on cherche d'abord une condition nécessaire puis on vérifie si la solution trouvée correspond ou non.
• Solution :
Si x est solution de $\sqrt{x+3} = x + 1$ alors nécessairement $x + 3 \geq 0$ donc $x \geq -3$.
Si x est solution de $\sqrt{x+3} = x+1$, on a alors $x+3 = (x+1)^2$. Soit $x+3 = x^2+2x+1$; et donc $x^2+x-2 = 0$.
Ce polynôme du second degré admet pour racines évidentes $x = 1$ et $x = -2$.
Et ces deux valeurs vérifient la première condition nécessaire : $x \geq -3$.
Si donc x est solution de l'équation alors x ne peut prendre que ces deux valeurs.

Réciproquement,
si $x = 1$ alors on a $\sqrt{x+3} = \sqrt{4} = 2$ et $x + 1 = 2$. Donc 1 est une solution.
si $x = -2$ alors on a $\sqrt{x+3} = \sqrt{1} = 1$ et $x + 1 = -1$. Donc -2 n'est pas une solution.
Ainsi, l'équation admet une unique solution : $x = 1$.

EXEMPLE :
Résoudre l'équation $\sqrt{x+3} = x + 1$.
• on cherche une condition nécessaire sans laquelle le problème ne peut exister, et on raisonne alors par équivalence, moyennant cette condition.

• Solution :
Si x est solution de $\sqrt{x+3} = x + 1$ alors nécessairement $x + 3 \geq 0$ donc $x \geq -3$.
Si x est solution de $\sqrt{x+3} = x + 1$ alors nécessairement $x + 1 \geq 0$ donc $x \geq -1$.
Sous ces deux conditions, donc pour $x \geq -1$, l'équation $\sqrt{x+3} = x + 1$ est équivalente à $x + 3 = (x + 1)^2$. Soit $x + 3 = x^2 + 2x + 1$; et donc $x^2 + x - 2 = 0$.
Ce polynôme du second degré admet pour racines évidentes $x = 1$ et $x = -2$.
Et une seule des ces deux valeurs vérifie les deux conditions nécessaires : $x \geq -1$.
Ainsi, l'équation admet une unique solution : $x = 1$.

5°) Exercices

Exercice 1 : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
a) Pour avoir son permis de conduire, il faut réussir son examen de conduite.
b) Pour avoir son permis de conduire, il suffit de réussir son examen de conduite.
d) Avoir 5 ans de conduite jeune conducteur est une condition nécessaire pour avoir le droit de rouler à 130 km/h sur l'autoroute.
e) Avoir 5 ans de conduite jeune conducteur est une condition suffisante pour avoir le droit de rouler à 130 km/h sur l'autoroute.
f) Avoir au moins 10 dans chaque matière au bac est une condition nécessaire pour avoir son bac.
g) Avoir au moins 10 dans chaque matière au bac est une condition suffisante pour avoir son bac.
h) Avoir au moins 10 de moyenne dans chaque matière au bac est une condition nécessaire pour avoir son bac.

Exercice 2 : Donner une condition nécessaire (pas forcément suffisante) à chacune des propositions suivantes :
a) Pour avoir son bac il est nécessaire
b) Pour gagner au loto il est nécessaire
c) Pour ne pas être renvoyé de l'établissement il est nécessaire
d) Pour bien parler anglais, il est nécessaire
e) Pour que A appartienne au segment $[BC]$, il est nécessaire que
f) Pour que $ABCD$ soit un carré, il est nécessaire que

Exercice 3 : Donner une condition suffisante (pas forcément nécessaire) à chacune des propositions suivantes :
a) Pour avoir son bac il suffit que
b) Pour gagner au loto il suffit que
c) Pour ne pas être renvoyé de l'établissement il suffit que
d) Pour bien parler anglais, il suffit que
e) Pour que A appartienne au segment $[BC]$, il suffit que
f) Pour que $ABCD$ soit un carré, il suffit que

Exercice 4 : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et préciser si la condition n'est que nécessaire ou que suffisante :
a) Pour que $xy \geq 0$ il est nécessaire et suffisant que x et y soient tous deux positifs
b) Pour que $ABCD$ soit un carré, il est nécessaire et suffisant que $ABCD$ soit un losange et un rectangle.
c) Pour que $ABCD$ soit un rectangle, il est nécessaire et suffisant que $ABCD$ soit un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur.
d) Pour que $ABCD$ soit un losange, il est nécessaire et suffisant que $ABCD$ soit un quadrilatère dont les diagonales ont la même longueur.

Exercice 5 :
Si A, B et C sont trois points distincts donnés, on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M soit à la même distance des trois côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
Méthode : Supposer que M a cette propriété, en déduire une propriété nécessaire sur le point M.
Étudier si cette propriété est suffisante.

Exercice 6 :
Si on admet que la propriété suivante est vraie : $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
Qui est nécessaire à qui ? Qui est suffisant à qui ?

Exercice 7 :
Si A, B, C et D sont quatre points distincts donnés, on cherche une condition nécessaire et suffisante sur ces quatre points pour qu'il existe un point M situé à la même distance des quatre points A, B, C et D.