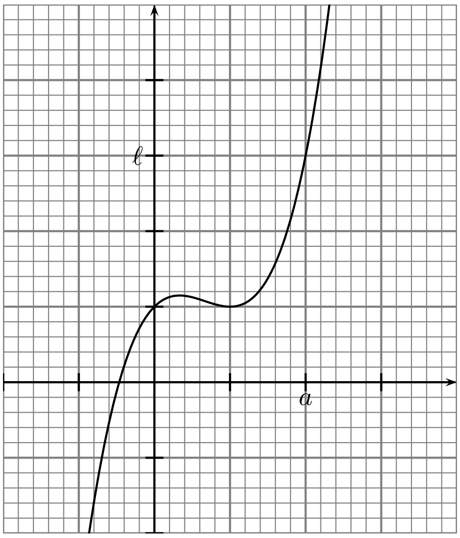
Cours sur les limites de fonctions

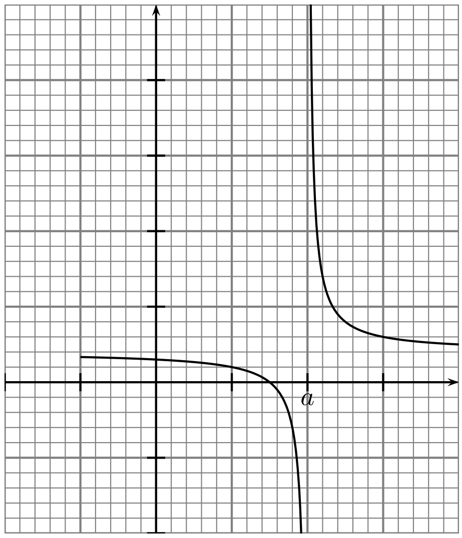
L'intuition graphique de la notion de limite est essentielle à la compréhension du cours.

I) Aspect graphique

1°) limite en un point

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors la courbe de f se rapproche du point de coordonnées $(a; \ell)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la courbe de f .... on parle de ....

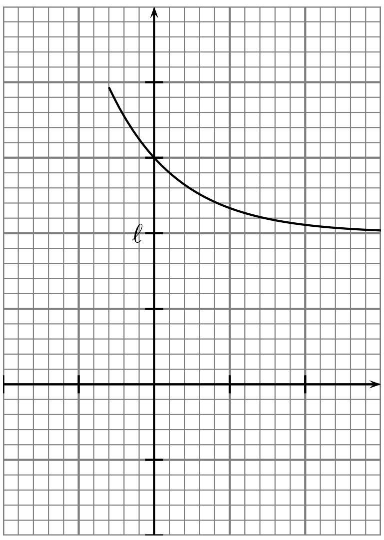


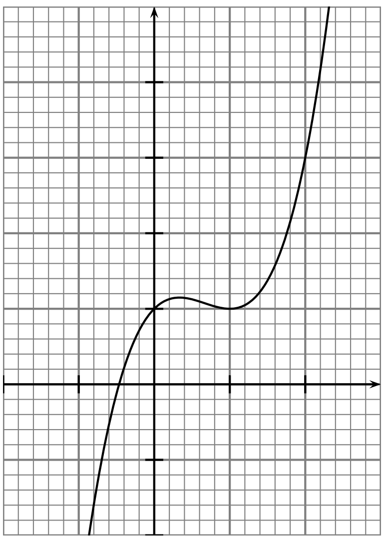


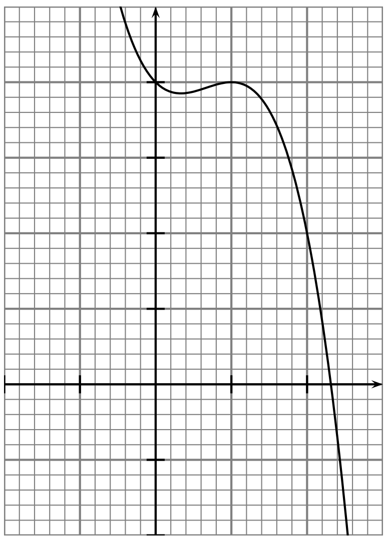
....

2°) limite en l'infini

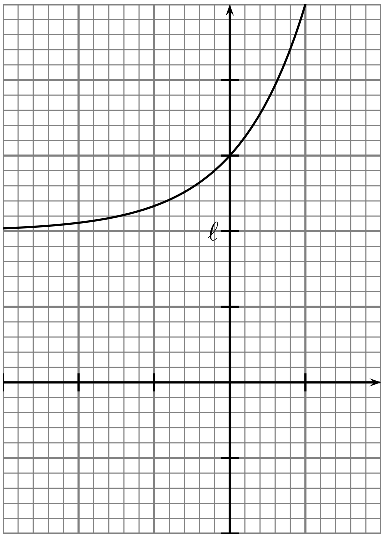
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la courbe de f .... on parle de ....
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors la courbe de f ....
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors la courbe de f ....

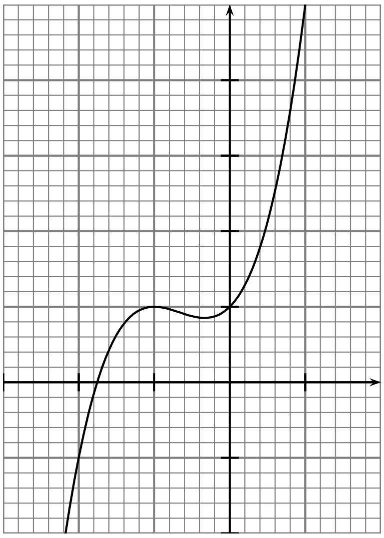


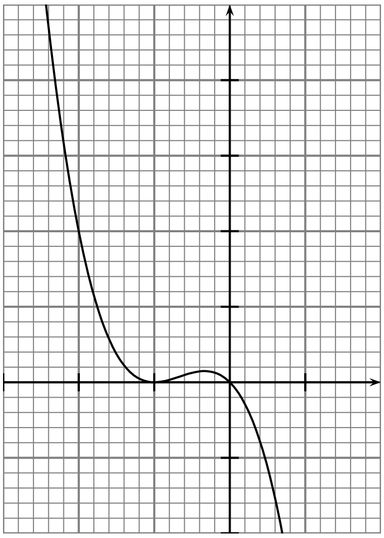




....







....

II) Opérations sur les limites de fonctions

Une forme indéterminée est un cas où la réponse reste incertaine : certains cas donnent des limites différentes.

1°) Limite de somme

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] =$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] =$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] =$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] =$

La seule forme indéterminée est $(+\infty) + (-\infty)$

2°) Limite d'une différence

La seule forme indéterminée est $(+\infty) - (+\infty)$

3°) Limite de produit

La seule forme indéterminée est $(0) \times (\pm\infty)$

4°) Limite de quotient

Les seules formes indéterminées sont $\dfrac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ et $\dfrac{(0)}{(0)}$

5°) Limite d'une composée

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} f \circ g(x) = c$

exemples :
Déterminer les limites suivantes :

- On a $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ pour tout x, et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} =$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x-2} =$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} =$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x-2} =$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x-2} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) =$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} =$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) + \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) =$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} =$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) - \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) =$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} =$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) \times \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) =$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) + e^x =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x+1 =$ et $\lim\limits_{x\to} e^x =$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x+1} =$

III) Croissances comparées des fonctions usuelles

Comment se comportent les fonctions usuelles : polynôme, ln, exp au voisinage de $+\infty$?

1°) Limite en $+\infty$

Il faut retenir que en $+\infty$, l'ordre de prédominance des fonctions est $\boxed{\ln(x) << \text{polynôme} << \exp(x)}$ de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{30}}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Les formules « officielles » à retenir sont :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = 0 \qquad \text{pour } \alpha > 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty \qquad \text{pour } \alpha > 0}$$

2°) Limite en 0^+

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

exemples :
Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)} =$ est à priori une forme indéterminée de la forme .... mais d'après le théorème sur les croissances comparées, on peut dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)} =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x \times e^{-x} =$ est à priori une forme indéterminée de la forme .... mais d'après le théorème sur les croissances comparées, on peut dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x \times e^{-x} =$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2e^x}{\ln(x)} =$ est à priori une forme indéterminée de la forme .... mais d'après le théorème sur les croissances comparées, on peut dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2e^x}{\ln(x)} =$