Cours sur la fonction logarithme

Problématique

D'après le cours sur les primitives, on sait que :
DÉFINITION : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; on appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

PROPRIÉTÉ : (admise) Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $\alpha \in I$, alors il existe une unique primitive F de f qui s'annule en α, c'est à dire telle que $F' = f$ et $F(\alpha) = 0$.
En particulier, la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique primitive qui s'annule en $\alpha = 1$, c'est cette primitive que l'on appelle la fonction logarithme.
L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés de cette fonction qui intervient dans de nombreux phénomènes économiques, biologiques ou chimiques.

1°) Définition de la fonction logarithme

DÉFINITION : fonction logarithme
La fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique primitive qui s'annule en $\alpha = 1$, c'est cette primitive que l'on appelle la fonction logarithme.
On note ln cette fonction. Elle vérifie donc

$$\ln(x)' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

2°) Propriétés de la fonction logarithme

PROPRIÉTÉ : variations
La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$
$\ln(x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$
la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
Pour a et b deux nombres strictement positifs, on a $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

PROPRIÉTÉ : règles de calcul
Pour tous nombres strictement positifs a et b, on a :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Si n est un entier non nul, $\ln(a^n) = n\ln(a)$

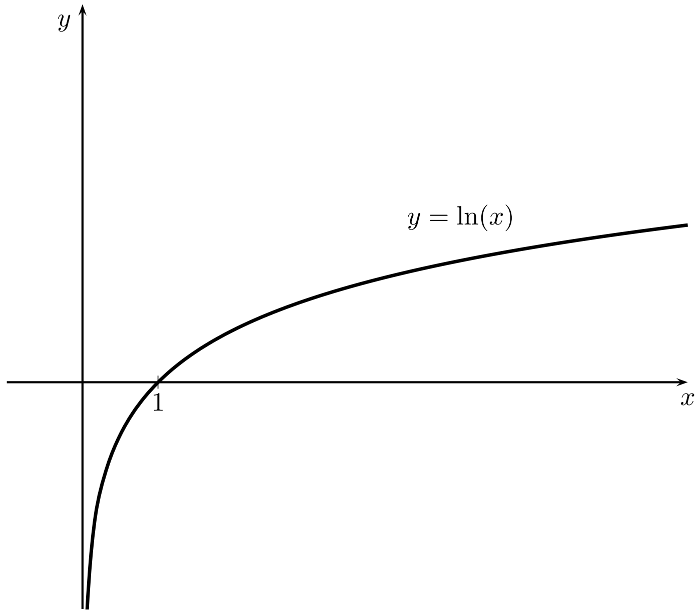
PROPRIÉTÉ : limites de la fonction ln

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

PROPRIÉTÉ : tableau de variations de la fonction ln
On peut résumer les propriétés précédentes dans son tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖		$+$		
variations de ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Et on peut tracer le graphe de la fonction :



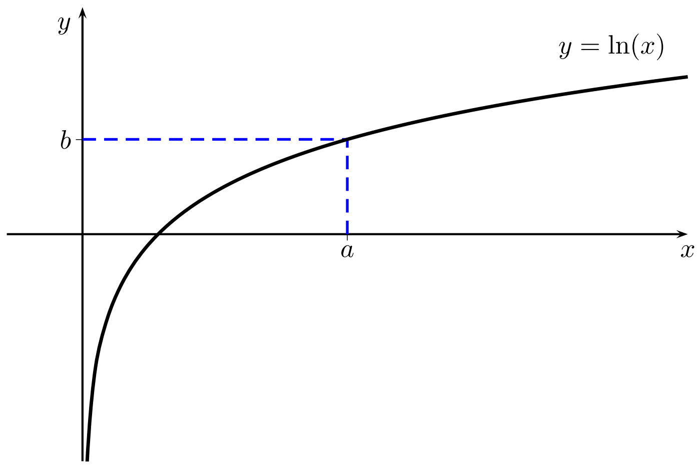
La fonction logarithme est caractérisée par une croissance "lente", c'est à dire que bien qu'elle tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, cette croissance se fait beaucoup plus lentement que toutes les fonctions polynômes et racines carrée (*cf* cours sur les limites et les règles de croissances comparées).

intervalle I	fonction $f(x)$	dérivée $f'(x)$
$I \subset]0;+\infty[$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
si $u(x) > 0$	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

intervalle I	fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$I \subset]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
si $u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u(x))$

3°) Vers la fonction exponentielle

La fonction ln est continue, strictement croissante, de plus $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $b \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel $a > 0$ tel que $\ln(a) = b$. C'est à dire que tout réel b admet un unique antécédent par la fonction ln.
Cet antécédent a est appelé « l'exponentielle de b », et noté $\exp(b)$ ou e^b.



En particulier, il existe un unique réel $\exp(1)$, noté e, tel que $\ln(e) = 1$.