Logique - Calcul propositionnel

En mathématiques, les théorèmes sont des propriétés très importantes. Ils s'écrivent le plus souvent à l'aide de liens logiques liant entre elles des propositions.

Exemple : « Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$ » est un théorème.
« Si ... alors » est le lien logique principal. Il relie deux propositions :
« $xy \geq 0$ » est la deuxième proposition.
« $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » est la première proposition, elle même issue de deux propositions : « $x \geq 0$ » suivie de « $y \geq 0$ » et séparée par le lien logique "et".

1°) Les liens logiques

On parle de lien logique ou de connecteur logique pour désigner un terme venant se placer entre deux propositions pour en former une troisième qui a alors un sens propre.

Implication $\Rightarrow$
Définition : Relation entre deux propositions telle que l'exactitude de la première entraîne celle de la seconde.
Le symbole se note $\Rightarrow$.
« $A \Rightarrow B$ » se traduit en français par « Si A alors B »

Exemple :
« Si x et y sont de même signe alors $xy \geq 0$ »
« Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$ » peut s'écrire « $(x \geq 0$ et $y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$ »

Et - $\cap$
Définition : Conjonction servant à marquer l'addition entre deux propositions. En mathématiques, on note aussi $\cap$, c'est l'intersection.

Ou - $\cup$
Définition : Conjonction servant à marquer l'union de deux propositions. En mathématiques, on note aussi $\cup$, c'est la réunion.

Avec ces trois connecteurs logiques, on a construits à partir de deux propositions, une troisième. Quand la troisième est-elle vraie ? C'est la lecture des **tables de vérité** qui nous l'indique :

Si on considère deux propositions A et B qui peuvent être Vraies (V) ou Fausses (F) , alors on a alors les tables de vérité suivantes :

A	B	« A et B »
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

A	B	« A ou B »
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

Attention, en mathématiques le OU n'implique pas forcément un choix exclusif !

Exemple :
Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte. $A =$ « la carte tirée est un coeur » et $B =$ « la carte tirée est un as ».

Si on tire un as de coeur alors A est Vraie et B est Vraie. Donc la proposition « A et B » est Vraie. La proposition « A ou B » est Vraie.

Si on tire un roi de coeur alors A est Vraie et B est Fausse. Donc la proposition « A et B » est Fausse. La proposition « A ou B » est Vraie.

Exemple :
Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte. On considère les propositions suivantes : $A =$ « la carte tirée est un coeur » et $B =$ « la carte tirée est un as ».

Exprimer tous les tirages correspondant à la proposition « A et B » et à la proposition « A ou B »

« A et B » :

« A ou B » :

Exemple :
On lance un dé à 6 faces. On considère les propositions suivantes : A = « le numéro est pair » et B = « le numéro est un multiple de 3 ».
Donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « A et B »
De même, donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « A ou B »

« A et B » :

« A ou B » :

2°) Négation d'une proposition

Si A est une proposition, alors non(A) est la négation de A. En logique, toute proposition est soit vraie soit fausse. C'est à dire que non(A) est vraie lorsque A est fausse, et non(A) est fausse lorsque A est vraie.

Exemple :
Si A est la proposition « le triangle est rectangle » alors sa négation non(A) est la proposition « le triangle n'est pas rectangle ».
Soit A est vraie et non(A) est fausse, soit c'est l'inverse : A est fausse et non(A) est vraie.

Exemple : Compléter le tableau suivant :

Proposition A	non(A)
« $x \geq 0$ »	
« $x > 0$ »	
« D_1 et D_2 sont deux droites parallèles disjointes »	
« D_1 et D_2 sont deux droites distinctes »	
« n est un entier pair »	

3°) Réciproque d'une implication, équivalence entre propositions

À l'aide de ce qui précède, on peut définir deux notions importantes en logique : Réciproque et Équivalence.

Réciproque

Définition : Proposition réciproque d'une implication
Proposition qui se déduit d'une proposition initiale lorsqu'on permute l'hypothèse et la conclusion.
La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

Exemple : La réciproque de « Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » est la proposition « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A »

Exemple : Écrire la proposition réciproque de :
« Si x et y sont de même signe alors $xy \geq 0$ » :
« Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $xy \geq 0$ » :

Attention, la réciproque d'un théorème vrai ne l'est pas nécessairement !

par exemple

Équivalence $\Longleftrightarrow$

Définition : Relation entre deux propositions telle que l'exactitude de la première entraîne celle de la seconde et

que réciproquement l'exactitude de la seconde entraîne celle de la première. C'est à dire que l'équivalence est une double implication. Le symbole se note $\iff$.
« $A \iff B$ » se traduit en français par « A si et seulement si B » ou « A équivaut à B »
EXEMPLE :
Pour $A =$ « x et y sont de même signe » et $B =$ « $xy \geq 0$ » , on a $A \iff B$.
Pour $A =$ « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » et $B =$ « $xy \geq 0$ » , on n'a pas $A \iff B$ car $A \Rightarrow B$; mais $B \not\Rightarrow A$.

4°) De l'usage d'exemples et de contre-exemples

Un **exemple** sert à illustrer une proposition, qui n'est à priori ni vraie ni fausse.
Un **contre-exemple** sert à montrer qu'une proposition est fausse.

Si A est la proposition « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » , alors « $x = 2$ et $y = 3$ » est un exemple illustrant cette proposition. Cette proposition n'est à priori ni vraie ni fausse.

Si B est la proposition « Si $xy \geq 0$ alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » , alors cette propriété est fausse car « $x = -1$ et $y = -2$ » est un contre-exemple.

Trouver un contre-exemple à la proprosition A revient à trouver un exemple niant la proposition A.

Une proposition A est soit vraie soit fausse, et si elle est fausse c'est qu'on peut trouver un contre-exemple.

5°) Démonstration par l'absurde

On admet que si A est une proposition, alors A et $\text{NON}(A)$ ne peuvent être vraies toutes les deux. On dit que la théorie est non contradictoire.
Pour démontrer certains théorèmes, on utilise une **démonstration par l'absurde** : il s'agit de supposer que la négation de la proposition est vraie, et montrer par une suite de raisonnements qu'elle est aussi fausse. On aboutit alors à une contradiction puisque la théorie est non contradictoire.

EXEMPLE de raisonnement par l'absurde : Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
On suppose $\sqrt{2}$ rationnel, alors il existe deux nombres entiers naturels a et b, $b \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et tels que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible. Alors on montrera que l'on peut encore simplifier cette fraction. D'où une contradiction.

On a encore un résultat très important issu du principe de démonstration par l'absurde :

raisonnement par contraposée : la proposition « $A \Rightarrow B$ » est vraie ssi « $\text{NON}(B) \Rightarrow \text{NON}(A)$ » l'est aussi

EXEMPLE de raisonnement par contraposée :
Pour $A =$ « x est un multiple de 4 » et $B =$ « x est un multiple de 2 »
Comme la proposition « $A \Rightarrow B$ » est vraie, cela implique par contraposée que « x n'est pas un multiple de 2 implique x n'est un multiple de 4 »

EXEMPLE de raisonnement par contraposée :
Dans ABC triangle, si on a les propositions suivantes : $A =$ « (IJ) est la droite des milieux » et $B =$ « (IJ) est parallèle à l'un des côtés du triangle »
Comme la proposition « $A \Rightarrow B$ » est vraie, cela implique par contraposée que :
« si (IJ) n'est parallèle à aucun des côtés du triangle alors (IJ) n'est pas une droite des milieux »

6°) Quantificateur universel et quantificateur existentiel

Quel que soit $\forall$
Définition : On appelle quantificateur universel de la propriété $P(x)$ la proposition : « la propriété $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x prises dans un ensemble E » se note « $\forall x \in E \ P(x)$ »

Il existe $\exists$

Définition : On appelle quantificateur existentiel de la propriété $P(x)$ la proposition : « il existe (au moins) un élément x, prises dans un ensemble E, tel que $P(x)$ est vraie » se note « $\exists x \in E\ P(x)$ »

EXEMPLE :
La propriété $A =$ « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est vraie. Elle se lit : "Pour tout x réel, x^2 est positif ou nul."
La propriété $B =$ « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ » est vraie. Elle se lit : "Il existe (au moins) un réel x, tel que $x^2 = 1$". En effet, $x = 1$ convient, et $x = -1$ aussi.

> La négation d'un quantificateur universel est un quantificateur existentiel, et réciproquement :
> la négation de « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est « $\exists x \in E,\ \text{NON}(P(x))$ »
> la négation de « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall x \in E,\ \text{NON}(P(x))$ »

EXEMPLE :
La propriété $A =$ « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ » est vraie. Sa négation NON$(A) =$ « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ » est fausse. Elle se lit : "Il existe x réel, tel que x^2 est strictement négatif."
La propriété $B =$ « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ » est vraie. Sa négation NON$(B) =$ « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 1$ » est fausse. Elle se lit : "Pour tout x réel, x^2 est différent de 1."

La propriété C désigne : « il a plu tous les jours ».
Sa négation NON(C) désigne : « il existe (au moins) un jour où il n'a pas plu », et non pas "il n'a jamais plu" comme le pensent certains...

7°) Logique avancée

Pour pouvoir affirmer la véracité ou la fausseté d'une proposition complexe, on a besoin de connaître les relations entre tous les connecteurs logiques définis précédemment. Ainsi, on a l'équivalence entre :

Proposition	Proposition équivalente
« NON(A et B) »	« NON(A) ou NON(B) »
« NON(A ou B) »	
« NON($A \Rightarrow B$) »	
« NON($A \iff B$) »	
« NON(Pour tout A on a B) »	
« NON(Il existe A tel que B) »	

EXEMPLE :
Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte. On considère les propositions suivantes :
$A =$ « la carte tirée est un coeur » et $B =$ « la carte tirée est un as ».

Exprimer à l'aide d'une phrase « NON(A et B) » et « NON(A ou B) »

EXEMPLE :
On lance un dé à 6 faces. On considère les propositions suivantes :
$A =$ « le numéro est pair » et $B =$ « le numéro est un multiple de 3 ».
Donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « NON(A et B) »
De même, donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « NON(A ou B) »

EXEMPLE :
$A =$ « $x \geq 0$ » et $B =$ « $y \geq 0$ ». Exprimer les propositions suivantes :
« NON(A et B) »
« NON(A ou B) »

8°) Exemples d'application

Exercice : Écrire la négation des propositions suivantes :

A : « Tous les élèves de la classe sont des garçons »
B : « Il n'y a un seul jour où je n'ai pensé à vous »
C : « C'est une fille blonde »
D : « s'il pleut alors mon jardin est mouillé »

Exercice : À l'aide d'un contre-exemple, montrer que les propositions suivantes sont fausses :

« La somme de cinq entiers consécutifs est toujours un nombre premier »

« Seuls sept nombres décimaux appartiennent à l'intervalle $]13,2;13,9[$ »

« Un polynôme admet toujours une racine »

« Pour tout entier naturel n, n^2+n+41 est un nombre premier » (Indication : esayer $n = 1$; $n = 2$ ... et $n = 40$).

Exercice : Écrire la négation des propositions suivantes ; puis, à l'aide d'un contre-exemple, regarder si c'est la proposition P ou sa négation NON(P) qui est vraie :

P : « tous les lapins mangent des carottes »
Q : « tous les mangeurs de carotte sont des lapins »
R : « parmi le groupe d'animaux, exactement un mangeur de carotte est un lapin »
S : « tous les mangeurs de carotte sauf un sont des lapins »
T : « tous les élèves sont des garçons ou sont blonds »
U : « l'animal est un lapin ou est une marmotte »
V : « si un renard rencontre un lapin alors il le mange »

Exercice :
Hier j'affirmais : « S'il pleut, alors je ne viendrais pas ». Je ne suis pas venu, A-t'il plu ?
Hier j'affirmais : « S'il pleut, alors je ne viendrais pas ». Je suis venu. A-t'il plu ?

Arnaud possède une voiture. Il affirme : « ma voiture est une Renault blanche ». Mais Arnaud ment. Puis-je affirmer que :
« Arnaud n'a pas de voiture »
« La voiture d'Arnaud n'est pas blanche »
« La voiture d'Arnaud n'est pas blanche et n'est pas une Renault »

Bertrand me donne l'itinéraire pour me rendre chez lui. Il y a trois routes : une en face, une à gauche et une à droite. Il affirme : « tu dois prendre à gauche ou à droite ». Mais il ment. Sait-on quelle route prendre ?

Arnaud dit à Bertrand : « Tous les élèves de ta classe ont les yeux bleus ». Bertrand lui dit que c'est faux car lui même a les yeux verts. Charles qui écoute la conversation dit à Bertrand qu'il n'a pas contredit ce que disait Arnaud car il faudrait lui opposer qu'aucun élève n'a les yeux bleus. La remarque de Charles est-elle exacte ? Bertrand avait-il raison.

Exercice :
Hier j'affirmais : « S'il pleut ou si mon réveil tombe en panne, alors je ne viendrais pas ». Je ne suis pas venu. Que s'est-il passé ?

Hier j'affirmais : « S'il il y a grève et si mon réveil ne fonctionne pas, alors je ne viendrais pas ». Je suis venu. Y avait-il des grèves ?

Hier j'affirmais : « S'il pleut ou si mon réveil tombe en panne, alors je ne viendrais pas ». Je suis venu. Que s'est-il passé ?