Cours sur les primitives

Problématique

Si f est une fonction dérivable, alors elle admet une unique fonction dérivée f'.
À l'inverse, si f est une fonction, à quelle condition existe t'il une fonction F dont f est la dérivée ? Et combien y-a t'il de telles fonctions F ?
C'est de cette problématique dont nous allons parler dans ce chapitre...

Exemple : Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2x$.
Dans "l'autre sens", la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

1°) Rappels sur les formules de dérivées

intervalle I	fonction $f(x)$	dérivée $f'(x)$
$I \subset \mathbb{R}$	a avec $a \in \mathbb{R}$	
$I \subset \mathbb{R}$	x	
$I \subset \mathbb{R}$	x^2	
$I \subset \mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	

intervalle I	fonction $f(x)$	dérivée $f'(x)$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^2}$	
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	
$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$\sqrt{x}$	

intervalle I	fonction $f(x)$	dérivée $f'(x)$
$I \subset]0; +\infty[$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$I \subset \mathbb{R}$	$e^x = \exp(x)$	e^x

Théorème : formules sur les sommes, produits, quotients et composées :

$(u+v)' = u' + v'$
$(u \times v)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$

$\ln(u)\ ' = \frac{u'}{u}$
$\exp(u)\ ' = u' \times \exp(u)$

2°) Définition d'une primitive, des primitives

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; on appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété : (admise) Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et k un nombre réel. Alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est encore une primitive de f sur I.
Toutes les primitives H de f sont de la forme $H(x) = F(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. Autrement dit, il y a une infinité de primitives, et deux primitives sont égales à une constante près.

Exemple :
Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$, alors f est la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$.
C'est à dire que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$ est une primitive de f. Ce n'est pas la seule, il y en a une infinité, et elles sont toutes égales à une constante près. Par exemple la fonction G définie par $G(x) = F(x) + 3$ est une autre primitive.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, alors f est la dérivée de la fonction F définie par $F(x) =$. C'est à dire que la fonction F définie par $F(x) =$ est une primitive de f. Ce n'est pas la seule, il y en a une infinité, et elles sont toutes égales à une constante près. Par exemple la fonction G définie par $G(x) = F(x) - 1$ est une autre primitive.

3°) Formules de primitives usuelles

Voici un formulaire de primitives à connaître par cœur :

intervalle I	fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$I \subset \mathbb{R}$	a avec $a \in \mathbb{R}$	
$I \subset \mathbb{R}$	x	
$I \subset \mathbb{R}$	x^2	
$I \subset \mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	

intervalle I	fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^2}$	
$I \subset \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$	
$I \subset \mathbb{R}^{+*}$	$\sqrt{x}$	

intervalle I	fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$I \subset]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$
$I \subset \mathbb{R}$	$e^x = \exp(x)$	e^x

Notation : On note parfois $\displaystyle\int f$ une primitive de f

Théorème : formules sur les sommes, produits, quotients et composées :

$$\int (u+v) = \int u + \int v$$

$$\int u'v + uv' = u \times v$$

$$\int \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{u}{v}$$

$$\int \frac{-u'}{u^2} = \frac{1}{u}$$

$$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$$

$$\int (u' \circ v) \times v' = (u \circ v)$$

$$\int \frac{u'}{u} = \ln(u)$$

$$\int u' \times \exp(u) = \exp(u)$$

Lors de l'étude du chapitre consacré au calcul d'intégrales (utile pour les calculs d'aires), on verra que les primitives sont au coeur de ces notions.