Cours sur les probabilités conditionnelles

Problématique

HISTOIRE DES PROBABILITÉS : (d'après l'encyclopédie universalis)
Le calcul des probabilités est certainement une des branches les plus récentes des mathématiques, bien qu'il ait en fait trois siècles et demi d'existence. On le retrouve dans presque toutes les branches de l'activité scientifique : analyse, économie, génétique, médecine épidémiologique, physique quantique...
Le calcul des probabilités est né de l'étude des jeux de hasard (ce mot venant de l' Arabe 'az-zahr ' : dé à jouer). Pascal et le Chevalier de Méré sont certainement les premiers à avoir voulu introduire le quantitatif dans ces études et à les mathématiser (un des problèmes posés à l'époque - au milieu de XVIIè siècle - était la répartition d'une cagnotte lorsqu'une partie de dés est interrompue !).
Avant que des définitions et propriétés claires ne voient le jour, de grossières erreurs furent commises ; on peut lire dans l'Encyclopédie de d'Alembert -1754 - qu'au jeu de pile ou face après avoir obtenu face trois fois de suite, face devenait moins probable au coup suivant.
C'est de cette problématique dont nous allons parler dans ce chapitre...

1°) Rappels sur les probabilités

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ un ensemble fini : l'univers des possibles. On associe à chaque élément e_i un nombre réel positif, noté $P(\{e_i\})$ ou $P(e_i)$ tel que

$$\boxed{0 \leq P(e_i) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1}$$

$P(e_i)$ est la probabilité de l' événement élémentaire e_i.

Vocabulaire : Donner tous les nombres $P(e_i)$ c'est définir une loi de probabilité sur Ω.
Exemple : On lance un dé à 6 faces et on regarde le numéro porté par la face supérieure. On note Ω l'ensemble des résultats possibles. Alors $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. C'est à dire que le résultat est $e_1 = "1"$ ou $e_2 = "2"$ ou $e_3 = "3"$ ... ou $e_6 = "6"$. Si le dé n'est pas truqué, on a envie d'associer la loi de probabilité :

$$P("1") = P("2") = \cdots = P("6") = \frac{1}{6}$$

Un événement A est une partie de l'univers Ω. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.

L'événement impossible est la partie vide $\emptyset$: $P(\emptyset) = 0$.
L'événement certain est la partie pleine Ω : $P(\Omega) = 1$.

L'événement « A ou B » est l'événement $A \cup B$. Le "ou" est à comprendre au sens non exclusif c'est à dire que cela ne signifie pas "ou bien".
L'événement « A et B » est l'événement $A \cap B$.

Deux événements A et B sont dits événements incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
Si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Si A et B sont deux événements quelconques alors

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Si $\overline{A}$ désigne l' événement contraire de A alors

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A).}$$

Si de plus, chacun des n événements élémentaires a la même probabilité (on dit que l'on a équiprobabilité) et si A est un événement constitué de m événements élémentaires alors

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Exemple : Dans le cas déjà évoqué de notre dé à 6 faces, la probabilité d'obtenir un numéro pair est $\frac{3}{6}$.

Dans le cas d'équiprobabilité, le calcul de probabilités coïncide avec le calcul de fréquences.

Exemple : Dans une classe de 30 élèves il y a 20 garçons et 10 filles. Je choisis d'interroger un(e) élève au hasard. Si on suppose que la loi uniforme s'applique alors la probabilité d'interroger une fille est de $\frac{10}{30}$, comme la fréquence des filles dans la classe.

2°) Fréquence conditionnelle - Probabilité conditionnelle

Exemple : Dans une classe de 30 élèves il y a 20 garçons et 10 filles. Parmi les garçons il y a 3 blonds et parmi les filles il y a 2 blondes. Je choisis d'interroger un(e) élève au hasard. On suppose donc que la loi uniforme s'applique. On confond donc probabilité et calcul de fréquence.

La probabilité d'interroger une personne blonde est de $\frac{5}{30}$.

La probabilité d'interroger une personne blonde sachant que j'interroge une fille est $\frac{2}{10} = \frac{6}{30}$.

La probabilité d'interroger une fille change à priori si je sait quelque chose en plus.

On va donc étudier l'influence d'un événement sur la réalisation d'un autre, c'est ce qu'on appelle les probabilités conditionnelles.

DÉFINITION : On appelle probabilité conditionnelle de l'événement A par rapport à B ou, probabilité de A sachant que B est réalisé, le nombre réel noté

$$\boxed{P_B(A) = P(A\,|_B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

3°) Exemples et représentations de probabilités conditionnelles

Pour représenter une situation où il y a des probabilités conditionnelles, on fait souvent la construction d'un arbre de probabilité ou "arbre pondéré".

Exemple : (d'après Amérique du sud 2006)

Lors d'un examen, Julien doit répondre à un Q.C.M.

À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.

On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$.

On note C l'évènement « Julien connaît la réponse »,

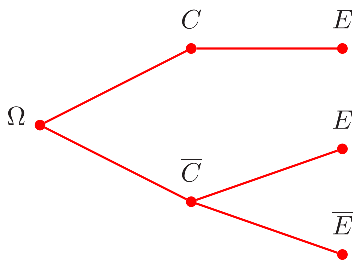
E l'évènement « la réponse est exacte ».

QUESTIONS

1. Julien répond à une question du Q.C.M.
   Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Démontrer que : $p(\mathrm{E}) = \frac{2}{3}$.
3. Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.

SOLUTION

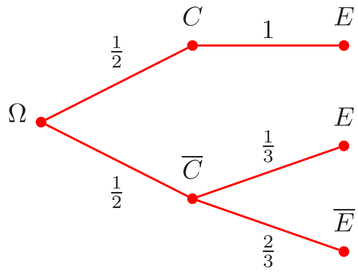
1. La succession des événements est



Voici les règles de représentation d'un arbre pondéré :

> – **Une branche relie un événement qui succède à un autre événement duquel il dépend, il en est conditionné**
> – **Sur chaque branche figure la proba conditionnelle de l'événement**
> – **La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1**

On obtient donc l'arbre suivant :



Par exemple, on a mis $P(C) = \dfrac{1}{2}$ et $P_C(E) = 1$ et $P_{\overline{C}}(E) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{C}}(\overline{E}) = \frac{2}{3}$.

SOLUTION

2 L'événement E "la réponse est exacte" peut apparaître dans deux cas incompatibles :
premier cas : "Julien connaît la réponse et sa réponse est exacte".
second cas : "Julien ne connaît pas la réponse et sa réponse est exacte".
On a donc $P(E) = P(E \cap C) + P(E \cap \overline{C}) = P_C(E) \times P(C) + P_{\overline{C}}(E) \times P(\overline{C}) = 1 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

Il faut connaître les règles d'utilisation d'un arbre pondéré :

> – **La probabilité d'un événement représenté par un chemin maximal est le produit des probabilités de chacune des branches qui composent le chemin : règle du produit.**
> – **La probabilité d'un événement représenté par un ensemble de plusieurs chemins maximaux est égale à la somme des probabilités correspondant à chacun des ces chemins maximaux : règle de la somme.**

4°) Théorèmes sur les probabilités conditionnelles

DÉFINITION : probabilités conditionnelle

On appelle probabilité de A sachant que B est réalisé, le nombre réel noté $\boxed{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

On a donc la relation suivante (par produit en croix) : $\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$

REMARQUE : Cette formule correspond sur l'arbre à la "règle du produit".

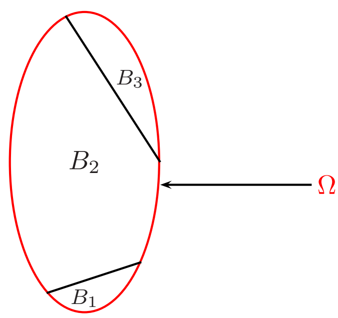
THÉORÈME : La formule des probabilités totales

Les événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituent une partition de l'univers Ω si

$$\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_n \qquad \text{et} \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j.$$

En plus clair, Ω est la réunion des ensembles B_i qui sont deux à deux disjoints.
Ou bien : Ω est la réunion des événements B_i qui sont deux à deux incompatibles.

Un exemple illustré permet de mieux comprendre la chose :



Exemple :
Sur ce dessin, Ω est la réunion des trois ensembles B_1, B_2 et B_3 qui sont deux à deux disjoints.

Soit alors A un événement , il est facile de voir que $A = A \cap \Omega = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$.
Comme $B_i \cap B_j = \emptyset$ (ils sont incompatibles), on a que $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$ (ils le sont aussi) on a :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \times P_{B_k}(A).$$

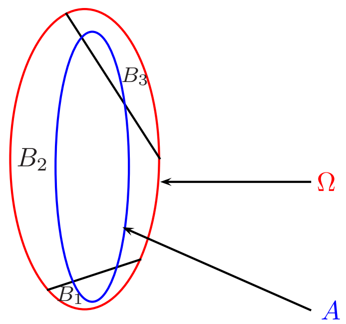
Ce qui nous conduit à énoncer la propriété suivante :

> Formule des probabilités totales :
> Soit $B_1, \ldots, B_n$ des événements constituant une partition de l'univers Ω, pour tout événement A on a :
>
> $$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \times P_{B_k}(A)$$

Remarque : Cette formule correspond sur l'arbre à la "règle de la somme".

Exemple : Dans le cas de la figure de l'exemple précédent, cela correspond à cette nouvelle figure :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(A) + P(B_2) \times P_{B_2}(A) + P(B_3) \times P_{B_3}(A) \end{aligned}$$



Théorème : "inversion" des probabilités conditionnelles

On suppose que l'on connaît $P_B(A)$, on a alors $\boxed{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B) \times P_B(A)}{P(A)}}$

Exemple :

5°) Indépendance de deux événements

Définition : indépendance
Deux événements A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P(B)$ ssi $P_B(A) = P(A)$ ssi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Intuitivement, deux événements sont indépendants l'un de l'autre si le fait que l'un se produise n'influe pas sur la proba de l'autre.
Cette intuition nous donne aussi les résultats suivants (à démontrer en exercice) : A et B sont indépendants ssi A et $\overline{B}$ sont indépendants ssi $\overline{A}$ et B sont indépendants ssi $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque :
Pour prouver l'indépendance de deux événements, on montre le plus souvent que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple : Une urne contient des jetons de deux couleurs : jaune et vert, portant chacun un numéro pair ou impair.
La probabilité pour que le jeton soit jaune est de $\frac{7}{12}$; la probabilité pour que le jeton porte un numéro pair est de $\frac{1}{3}$.
La probabilité pour que le jeton soit jaune et porte un numéro pair est de $\frac{1}{12}$.
On tire au hasard un jeton de cette urne.

Traduire cet énoncé dans ce tableau de fréquences :

	être jaune	être vert	TOTAL
numéro pair			
numéro impair			
TOTAL			

1. Les événements «jaune» et «pair» sont-ils indépendants ?
2. Quelle est la probabilité pour que le jeton soit vert ?
3. Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro impair ?
4. Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro impair et soit vert ?
5. «vert» et impair sont-ils indépendants ?
6. Quelle est la probabilité pour que le jeton soit jaune sachant qu'il porte un numéro pair ?

6°) Exemples pratiques d'utilisation de probabilité conditionnelle

En génétique, la probabilité qu'un caractère génétique se transmette au cours des générations successives et "s'exprime" (le gène du daltonisme peut être présent dans le génome d'un individu sans qu'il présente de troubles de la vue, on parle d'allèle récessif) dépend des gènes des parents.
On réalise parfois un "tableau de croisement" des gènes pour calculer la probabilité d'apparition d'une maladie génétique.
C'est Georg Mendel qui le premier a défini les règles de la génétique moderne en s'appuyant sur des études statistiques de croisements de petits pois !

En médecine épidémiologique, on est amené lors de tests sur des cobayes à évaluer (par un calcul de fréquence) la proba qu'un vaccin détecte une maladie. Les vaccins n'étant pas parfait, il y aura des personnes malades non détectées, et des personnes non malades qui réagiront quand même positivement au vaccin.
Pour évaluer l'efficacité du vaccin, on inocule le virus à des cobaye, puis on teste le vaccin. On évalue donc (par le calcul de fréquence) la probabilité que le test soit positif (événement T) sachant que le cobaye est malade (événement M). C'est à dire $P_M(T)$.
Et par utilisation des théorèmes précédents, on calcule alors (de façon théorique) la proba $P_T(M)$ c'est à dire la probabilité que le cobaye est malade sachant que le test est positif.
Remarque : la probabilité $P_T(M)$ ne pourrait-être connue par des tests... la théorie mathématique joue donc un rôle essentiel.