les suites

1) Définition d'une suite

DÉFINITION : Une suite est une application définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Une suite se nomme de préférence u ou v ou w plutôt que f ou g.

EXEMPLE : La suite u définie par $u(n) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ prend pour valeurs $u(0) = 0^2 = 0$, $u(1) = 1^2 = 1$, $u(2) = 2^2 = 4$, $u(3) = 3^2 = 9$, $u(4) = 4^2 = 16$...

NOTATION : On note u_n plutôt que $u(n)$ l'image de n par la suite u. Et plutôt que de parler de u_n comme l'image de n, on dit que u_n est le terme d'indice n de la suite u.
On note u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite, c'est à dire l'application u, ou encore l'ensemble indicé par $\mathbb{N}$ de toutes les images u_n.

REMARQUES :
Attention à ne pas confondre la suite (u_n) et le terme u_n : u_n désigne un seul terme de la suite alors que (u_n) désigne l'ensemble de tous les termes de la suite.

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir de u_0, u_n est le terme d'indice n de la suite (u_n), on dit parfois aussi (par abus de langage) que le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite est u_n ; alors le $0^{\text{ième}}$ correspond à u_0 (même si cette appellation est quelque peu incongrue).

Une suite peut-être définie sur une sous partie de $\mathbb{N}$, par exemple à partir de u_1, auquel cas on écrit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $u = (u_n)_{n\geq 1}$.

2) Variations d'une suite

DÉFINITION : Si (u_n) est une suite donnée alors par définition,
- la suite (u_n) est dite croissante ssi $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- la suite (u_n) est dite constante ssi $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- la suite (u_n) est dite décroissante ssi $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On parle de suite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) lorsque $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (respectivement lorsque $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

REMARQUES : Une suite croissante ou décroissante est une suite dite monotone.
Étudier le monotonie c'est dire si la suite est croissante, décroissante, constante ou non monotone.

EXEMPLES :
La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante car pour tout entier naturel n on a $n + 1 \geq n \geq 0$; et d'après la propriété : "les carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres", on a : $(n + 1)^2 \geq n^2$, c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n$.
Ainsi, la suite (u_n) vérifie : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc (u_n) est croissante.

La suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 0$ n'est pas monotone car $u_0 < u_1$ mais $u_1 > u_2$.

PROPRIÉTÉ : Si (u_n) est une suite donnée alors :
- la suite (u_n) est croissante ssi $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- la suite (u_n) est constante ssi $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- la suite (u_n) est décroissante ssi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PROPRIÉTÉ : Si (u_n) est une suite donnée, à valeurs strictement positives alors :
- la suite (u_n) est croissante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- la suite (u_n) est constante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- la suite (u_n) est décroissante ssi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

MÉTHODE : Ainsi, pour étudier les variations d'une suite (u_n), on est amené à étudier le signe de la différence de deux termes successifs : le signe de $u_{n+1} - u_n$. L'étude du signe est plus aisée en général.

EXEMPLE : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u(n) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ prend pour valeurs :
$u_1 = 1 \quad u_2 = \frac{1}{2} \quad u_3 = \frac{1}{3} \quad u_4 = \frac{1}{4}$ ...
Cette suite semble décroissante car $u_1 > u_2 > u_3 > u_4$.
Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

en effet, $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$ et $n+1 > 0$ donc $n(n+1) > 0$, puis $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$.

Conclusion : cette suite est strictement décroissante puisqu'elle vérifie $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
EXEMPLE : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u(n) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ prend pour valeurs :
$u_1 = 1 \quad u_2 = 2^2 = 4 \quad u_3 = 3^2 = 9 \quad u_4 = 4^2 = 16$ ...
Cette suite semble croissante car $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$.
Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1 > 0$$

en effet, $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ et donc $2n \geq 0$, puis $2n + 1 \geq 1 > 0$.
Conclusion : cette suite est strictement croissante puisqu'elle vérifie $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Modes de génération d'une suite

PROPRIÉTÉ : Si (u_n) est une suite donnée alors :
u_n est le terme d'indice n de la suite (u_n). Le terme précédent est u_{n-1}, c'est le terme d'indice $(n-1)$; et le suivant u_{n+1}, c'est le terme d'indice $(n+1)$.

PROPRIÉTÉ : Une suite peut-être définie « explicitement » par une formule donnant u_n en fonction de n, ou « par récurrence ».

DÉFINITION : Une suite (u_n) est dite définie par récurrence si on connaît le terme initial u_0 et une relation liant un terme u_{n+1} au(x) terme(s) qui le précède(nt).
Exemples :
• (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_0 = 3$ et $u_1 = 2u_0 = 6$; puis $u_2 = 2u_1 = 12$; puis $u_3 = 24$...
• (u_n) est la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_0 = 2$ et $u_1 = 3 + u_0 = 5$; puis $u_2 = 3 + u_1 = 8$; puis $u_3 = 11$...

REMARQUES :
L'objectif est souvent de passer d'une formule de récurrence à une formule "explicite" donnant u_n directement en fonction de n.
Par exemple, la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ admet pour premiers termes $u_1 =$ et $u_2 =$ et $u_3 =$ donc il semble qu'on a la formule "générale" $u_n =$. Pour démontrer une telle formule, on utilise une démonstration par récurrence.

4) Suites arithmétiques et suites géométriques

DÉFINITION : Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle est définie par récurrence par une relation de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, où r est une constante appelée raison de la suite arithmétique.
Autrement dit, pour passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1} on ajoute toujours la même constante r.

PROPRIÉTÉ : Si une suite (u_n) est arithmétique alors son terme général s'écrit sous la forme

$$\boxed{u_n = u_0 + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Si la suite ne commence qu'à partir de u_1, on a $u_n = u_1 + (n-1)r$ pour tout $n \geq 1$; ou $u_n = u_2 + (n-2)r$ pour tout $n \geq 1$, on parle de "décalage".

PROPRIÉTÉ : Une suite (u_n) est arithmétique ssi son terme général s'écrit sous la forme $\boxed{u_n = a + nb}$. Le nombre b est alors sa raison.

EXEMPLE : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 3 + 5n$ est arithmétique de raison $r = 5$. Son premier terme est $u_1 = 3 + 5 \times 1 = 8$.

MÉTHODE : Pour étudier si une suite (u_n) est arithmétique, on est amené à montrer la différence entre deux termes successifs est constante, c'est alors la raison r de la suite. Par exemple, on calcule $u_{n+1} - u_n$, ou $u_n - u_{n-1}$.

DÉFINITION : Une suite (u_n) est dite géométrique si elle est définie par récurrence par une relation de la forme $u_{n+1} = u_n \times q$, où q est une constante appelée raison de la suite géométrique.
Autrement dit, pour passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1} on multiplie toujours par la même constante q.

PROPRIÉTÉ : Si une suite (u_n) est géométrique alors son terme général s'écrit sous la forme

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Si la suite ne commence qu'à partir de u_1, on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$; ou $u_n = u_2 \times q^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$, on parle de "décalage".

PROPRIÉTÉ : Une suite (u_n) est géométrique ssi son terme général s'écrit sous la forme $\boxed{u_n = a \times b^n}$. Le nombre b est alors sa raison.

EXEMPLE : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 5 \times 2^n$ est géométrique de raison $q = 2$. Son premier terme est $u_0 = 5 \times 2^0 = 5 \times 1 = 5$.

MÉTHODE : Pour étudier si une suite (u_n) est géométrique, on est amené à montrer le quotient de deux termes successifs est constante, c'est alors la raison q de la suite. Par exemple, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, ou $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$.

5) Exemples de suites

EXEMPLE 1 :
Une plante croît de 5 cm la première année, puis de 10 cm tous les ans.
Quelle est sa taille au bout de la première année ?
Quelle est sa taille au bout de la deuxième année ?
Quelle est sa taille au bout de la troisième année ?
Quelle est sa taille au bout de la $n^{\text{ième}}$ année ?
Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
EXEMPLE 2 :
Une balle rebondit avec un amortissement, de telle sorte que la hauteur atteinte par la balle après chaque rebond est le tiers de la hauteur précédant ce rebond.
On lâche la balle d'une hauteur de 2 mètres.
Calculer la hauteur de la balle au premier rebond.
Calculer la hauteur de la balle au second rebond.
Calculer la hauteur de la balle au $n^{\text{ième}}$ rebond.
Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
EXEMPLE 3 :
Une casserole d'eau est mise à chauffer. Elle contient 1 litre d'eau. À partir de l'ébullition, chaque minute, ce sont 15 cl d'eau qui s'évaporent.
Quelle quantité d'eau reste-t'il après la première minute d'ébullition ?
Quelle quantité d'eau reste-t'il après la deuxième minute d'ébullition ?

Quelle quantité d'eau reste-t'il après la $n^{\text{ième}}$ minute d'ébullition ?
Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?

Exemple 4 :
Un arbre grandit de 4 mètres la première année, puis tous les ans, il grandit de la moitié de la taille qu'il avait acquis à la fin de l'année précédente.
Quelle est la taille de l'arbre la première année ?
Quelle est la taille de l'arbre la seconde année ?
Quelle est la taille de l'arbre la troisième année ?
Si n est un entier supérieur ou égal à 1, on note u_n la taille de l'arbre la $n^{\text{ième}}$ année.
Que représente u_1 ? Que représente u_2 ?
Que représente u_n ? Que représente u_{n+1} ?
Montrer que $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n$.
En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Puis l'expression de u_n en fonction de n.

6) Propriétés globales d'une suite

Monotonie :
Une suite est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante. Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.

Méthode :

Pour montrer qu'une suite est croissante, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, il suffit de montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} < u_k$.

Pour montrer qu'une suite est décroissante, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
Pour montrer qu'une suite n'est pas décroissante, il suffit de montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} > u_k$.

Pour montrer qu'une suite n'est ni croissante, ni décroissante, il suffit de montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} < u_k$, et qu'il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\ell+1} > u_\ell$.

Encadrement des termes d'une suite :

Une suite est majorée s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite, c'est à dire : un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout entier n.
En particulier, toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Une suite est minorée s'il existe un réel m inférieur à tous les termes de la suite, c'est à dire : un réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout entier n.
En particulier, toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
C'est à dire s'il existe deux réels m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout entier n.

Méthode :
Pour <u>étudier</u> si une suite est majorée, minorée ou bornée, il faut calculer plusieurs termes de la suite et conjecturer la majoration, minoration ou encadrement correspondant.
Pour <u>démontrer</u> qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, il faut raisonner directement sur l'inégalité $u_n \leq M$ (ou $u_n \geq m$, ou $m \leq u_n \leq M$), et démontrer que cette inégalité est vraie pour tout entier n, soit en se ramenant à une étude de signe : $u_n - M \leq 0$ ou $u_n - m \geq 0$; soit en faisant une démonstration par récurrence.

Remarques : Une suite arithmétique n'est jamais bornée (sauf le cas très particulier de la suite constante, de raison nulle). Une suite géométrique est bornée si et seulement si la valeur absolue de sa raison est inférieure à 1. Auquel cas, on a $|u_n| \leq |u_0|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence des termes d'une suite :

On dit que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ ssi tous les termes de la suite sont aussi près de ℓ que l'on veut, à partir d'un certain rang.
Quand la suite admet une limite finie on dit qu'elle est convergente. Dans tous les autres cas, on dit qu'elle est divergente.
Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ ssi tous les termes de la suite dépassent tout réel $A > 0$, à partir d'un certain rang.
De même, une suite (v_n) tend vers $-\infty$ ssi tous les termes de la suite sont inférieurs à tout réel $B < 0$, à partir d'un certain rang.

Attention, une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas convergente, elle admet une limite, mais une limite infinie. Elle ne peut donc être qualifiée de convergente. Elle est donc divergente.
Attention, une suite divergente ne tend pas forcément vers l'infini. Par exemple, (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas ; elle est donc divergente. Elle est bornée (comprise entre -1 et 1), et ne tend donc pas vers l'infini.

Propriété : On retiendra les limites (très intuitives) des suites de référence :

$$\lim_{n\to+\infty} n = \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = \qquad \lim_{n\to+\infty} n^3 = \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = \qquad \lim_{n\to+\infty} e^n =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} =$$

Remarques :
Une suite arithmétique n'est jamais convergente, sauf le cas très particulier de la suite constante lorsque $r = 0$.
Une suite arithmétique tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et elle tend vers $-\infty$ si $r < 0$.
Une suite géométrique est convergente si et seulement si la valeur absolue de sa raison est strictement inférieure à 1 : $|q| < 1$, et dans ce cas elle a pour limite 0.
Une suite convergente est bornée, la réciproque est fausse.