De l'utilisation de la moyenne géométrique.

Problématique

L'inflation d'un pays est de 5% la première année et de 20% la suivante, quelle est l'augmentation moyenne en % des prix durant cette période ?

Si vous répondez 12,5 alors vous faites une erreur...

Un exemple

En effet, l'augmentation globale en pourcentage des prix sur cette période de deux ans n'est pas de $5+20 = 25\%$. Et c'est là que se situe votre erreur...
Partant d'un objet coûtant 100 € au début de la période, avec l'inflation, le prix passe à 105 € à la fin de la première année, puis à $105 + \frac{20}{100} \times 105 = 126$ €.
L'augmentation des prix est donc de 26% sur les deux années. Cela correspond à une augmentation moyenne de $12,25\%$ par an sur la période de deux ans. En effet, $(1,1225)^2 \simeq 1,26$.

Mais la question est : comment trouve t-on ce chiffre de 12,25 % ? Comment généraliser ?

Cas général...

On se souvient qu'en classe de première, l'étude d'évolutions successives en pourcentages était étudiée grâce aux coefficients multiplicateurs.
En effet, considérons une suite d'augmentations (ou diminutions) successives en pourcentages de t_1 %, puis de t_2 %, puis de t_3 %, ... , , puis de t_N %. L'objectif est de calculer le pourcentage d'augmentation moyen sur ces N années.
On calcule d'abord les coefficients multiplicateurs liés à chaque évolution : $CM_1 = 1+t_1$ en cas d'augmentation ou $CM_1 = 1 - t_1$ en cas de diminution.
Alors le coefficient multiplicateur global est $CM = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \ldots \times CM_N$.
Si $CM > 1$ il y a augmentation, si $CM < 1$ il y a diminution.
Si on appelle T le taux d'augmentation moyen, alors le coefficient multiplicateur pour chaque année est $1+T$, et donc le coefficient multiplicateur global (pour les N années) est $(1+T)^N$.
On trouve donc que

$$(1+T)^N = CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \ldots \times CM_N$$

On doit donc calculer $\sqrt[N]{CM_1 \times CM_2 \times CM_3 \times \ldots \times CM_N}$. C'est ce nombre qu'on appelle la moyenne géométrique des nombres $(CM_1, CM_2, \ldots, CM_N)$.

Application 1

Un salaire subit successivement une hausse de 10%, une hausse de 20% , une hausse de 40%, une hausse de 30%. Quelle est l'évolution moyenne sur cette période ?
Les coefficients multiplicateurs successifs sont $1,1$, puis $1,2$, puis $1,4$ puis $1,3$.
Le coefficient multiplicateur global est donc $CM_{Global} = 1,1 \times 1,2 \times 1,4 \times 1,3 = 2,4024$.
$CM_{Global} > 1$ donc on a une augmentation globale de $140,24\%$.
L'augmentation moyenne de $T\%$ est telle que $(1+T)^4 = CM_{Global}$. Donc $1+T = \sqrt[4]{2,4024} \simeq 1,244977004$ donc une hausse moyenne de $24,5\%$ environ.
Remarque : Si on calculait $10+20+40+30$, alors on aurait 100, ce qui est très loin des $140,24\%$ trouvés.

Application 2

Un salaire subit successivement une hausse de 10%, une baisse de 20%, une hausse de 40%, une baisse de 30%. Quelle est l'évolution moyenne sur cette période ?
Les coefficients multiplicateurs successifs sont $1,1$, puis $0,8$, puis $1,4$ puis $0,7$.
Le coefficient multiplicateur global est donc $CM_{Global} = 1,1 \times 0,8 \times 1,4 \times 0,7 = 0,8624$.
$CM_{Global} < 1$ donc on a une diminution.
La diminution moyenne de $T\%$ est telle que $(1-T)^4 = CM_{Global}$. Donc $1-T = \sqrt[4]{0,8624} \simeq 0,9636674433$ donc une baisse moyenne de $3,64\%$ environ.