Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans, n étant un entier naturel, on note :
a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
P_n la matrice $[a_n \quad b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0 \quad b_0]$.

2. **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.

c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.

3. **a.** Quelle est la relation de récurrence entre P_n, M et P_{n+1} ?

b. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation de récurrence $a_{n+1} = 0,45 + 0,4a_n$.

c. On définit une suite (x_n) par $x_n = a_n - \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (x_n) est géométrique.

d. Donner l'expression de x_n en fonction de n. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

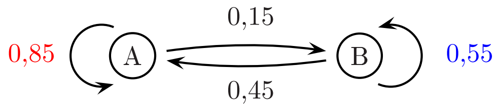
e. Montrer que (a_n) admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

f. Quelle est la monotonie de la suite (a_n) ? La suite (a_n) atteindra-t-elle la valeur de 80 % ?

4. Que se passerait-il si $a_0 = \frac{3}{4}$? Interpréter ce résultat en terme de nombre d'abonnements.

1. La proportion de personnes ayant choisi l'abonnement A est $\frac{1500}{2500} = 0,6$, et la proportion de personnes ayant choisi l'abonnement B est $\frac{1000}{2500} = 0,4$.
Donc l'état initial est $P_0 = [a_0 \quad b_0] = [0,6 \quad 0,4]$.

2. **a.** Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.
Voici le graphe probabiliste décrivant la situation (on complète en sachant que dans chaque cas la probabilité de rester dans la même situation plus la probabilité d'en changer est égale à 1) :



b. La matrice de transition est alors $M = [0,6 \quad 0,4] \times \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$

c. L'année 1 on a $P_1 = P_0 M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,45 & 0,55 \end{pmatrix} = [0,69 \quad 0,31]$
Et 69% de 2500 représente 1725 personnes. Il y a donc 1725 personnes choisissant la formule A, et 775 personnes choisissant la formule B.

3. **a.** On a toujours la relation $P_{n+1} = P_n M$.

b. La relation $P_{n+1} = P_n M$ se traduit par : $P_{n+1} = [a_{n+1} \quad b_{n+1}] = [a_n \quad b_n] \times \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

C'est à dire $\left\{ \begin{array}{rcrcr} a_{n+1} & = & 0{,}85\, a_n & + & 0{,}45\, b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}15\, a_n & + & 0{,}55\, b_n \end{array} \right.$

Et puisque $a_n + b_n = 1$, on a $b_n = 1 - a_n$. On a donc

$$a_{n+1} = 0{,}85\, a_n + 0{,}45\, b_n = 0{,}85\, a_n + 0{,}45\,(1 - a_n) = 0{,}4\, a_n + 0{,}45$$

c. Pour tout n, on a $x_n = a_n - \frac{3}{4}$ donc $x_{n+1} = a_{n+1} - \frac{3}{4}$. Et sachant que $a_{n+1} = 0{,}4\, a_n + 0{,}45$, on a $x_{n+1} = 0{,}4\, a_n + 0{,}45 - \frac{3}{4} = 0{,}4\, a_n - 0{,}3$.

Et sachant que $x_n = a_n - \frac{3}{4}$, on a $a_n = x_n + \frac{3}{4}$.

Donc $x_{n+1} = 0{,}4\, a_n - 0{,}3 = 0{,}4 \left(x_n + \frac{3}{4} \right) - 0{,}3 = 0{,}4\, x_n + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}4\, x_n$.

La suite (x_n) vérifie la relation $x_{n+1} = 0{,}4\, x_n$. C'est donc une suite géométrique de raison $0,4$.

d. La suite (x_n) est une suite géométrique de raison $0,4$ et de premier terme $x_0 = a_0 - \frac{3}{4} = -0,15$. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_n = x_0\,(0,4)^n = -0,15 \times (0,4)^n$$

Par suite, $a_n = x_n + \frac{3}{4} = -0,15 \times (0,4)^n + 0,75$.

$$\boxed{a_n = -0,15 \times (0,4)^n + 0,75}$$

e. On a $a_n = -0,15 \times (0,4)^n + 0,75$, et puisque $0 < 0,4 < 1$, la suite géométrique de terme général $0,4^n$ tend vers 0. Le terme a_n tend donc vers $0,75 = \frac{3}{4}$.

f. La suite de terme général $(0,4)^n$ tend vers 0 en décroissant. Donc la suite de terme général $-0,15 \times (0,4)^n$ tend vers 0 en croissant. Et la suite de terme général $-0,15 \times (0,4)^n + 0,75$ tend vers $0,75$ en croissant.

Par conséquent, la valeur de 80% ne sera jamais atteinte.

4. Si $a_0 = \frac{3}{4}$ valeur de la limite, donc de l'état stable pour A, alors la suite (a_n) est constante, égale à $\frac{3}{4} = 0,75$.
La proportion d'abonnés A ne variera plus.

Remarque : On pouvait aussi calculer $x_0 = 0$. Donc $x_n = 0$ pour tout n, puis (a_n) est constante, égale à $a_0 = \frac{3}{4} = 0,75$.