

Démonstration par Récurrence

Principe de la démonstration par récurrence :

Pour montrer qu'une propriété P_n , dépendant d'un paramètre entier, est vraie pour **tous les entiers** à partir d'un certain rang n_0 , on peut raisonner par récurrence : on montre que

$$\begin{cases} \text{La propriété est vraie au rang initial } n = n_0 : P_{n_0} \text{ est vraie ; on parle d'initialisation} \\ \text{La propriété est héréditaire : si } P_n \text{ est vraie alors } P_{n+1} \text{ est vraie} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la propriété est vraie pour tous les entiers à partir de n_0 : P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

EXEMPLE : Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons P_n la propriété : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour montrer que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$, on montre que :

- P_n est vraie pour $n = 1$ (étape d'initialisation).
- Puis on montre que la propriété P_n est héréditaire.

Rédaction type d'une démonstration par récurrence :

Une démonstration par récurrence se rédige de façon très « formatée », c'est toujours le même « rituel » :

Question type : Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq n_0$, on a : P_n .

Démonstration : Notons P_n la propriété : ...

- Initialisation : La propriété P_{n_0} est-elle vraie ?

$\vdots$ $\vdots$ on vérifie que c'est le cas

Donc P_{n_0} est vraie.

- Hérédité :

Supposons que pour un entier n , $n \geq n_0$ on a : P_n vraie ; montrons alors que P_{n+1} est vraie. C'est à dire que ...

$\vdots$ $\vdots$ on vérifie que la propriété est héréditaire ; on se sert du fait que P_n est vrai

Donc P_{n+1} est vraie.

- Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = n_0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq n_0$.

fin de la démonstration

Méthodologie : pour bien faire une démonstration par récurrence, il faut :

identifier P_n , et écrire P_n .

trouver le rang d'initialisation

écrire P_n et P_{n+1} et trouver ce qui peut les « relier ».

Exemple type d'une démonstration par récurrence :

EXEMPLE :

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

MÉTHODE :

identifier P_n , et écrire P_n :

trouver le rang d'initialisation :

écrire P_n et P_{n+1} et trouver ce qui peut les « relier » : P_n : P_{n+1} :

Question type :Montrer par récurrence sur n entier, que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.**Démonstration :**Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.Notons P_n la propriété : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

• Initialisation :

La propriété P_1 est-elle vraie? A-t-on $1 = \frac{1(1+1)}{2}$? $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier n , $n \geq 1$ on a : P_n vraie; montrons alors que P_{n+1} est vraie.Supposons que pour un entier n , $n \geq 1$ on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;montrons alors que $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = [1 + 2 + \dots + n] + (n+1) \quad (\star)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.Donc $(\star)$ devient :

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

De plus, on a :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc on a $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$; c'est à dire que P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.C'est à dire : pour tout n entier, $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple type d'une démonstration par récurrence :

EXEMPLE :

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

MÉTHODE :

identifier P_n , et écrire P_n :

trouver le rang d'initialisation :

écrire P_n et P_{n+1} et trouver ce qui peut les « relier » :

P_n :

P_{n+1} :

* * * * *

Question type :

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

Démonstration :

Montrons par récurrence sur n que $u_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons P_n la propriété : $u_n = 3$.

• Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie? A-t-on $u_0 = 3$?

Ceci est vrai d'après l'énoncé. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier n , $n \in \mathbb{N}$ on a : P_n vraie; montrons alors que P_{n+1} est vraie.

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 3$; montrons alors que $u_{n+1} = 3$.

On a par définition, $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$, et par hypothèse de récurrence, $u_n = 3$, donc :

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3}$$

De plus, on a :

$$\frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3} = \frac{18}{6} = 3$$

Donc on a $u_{n+1} = 3$; et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$.

Exemples de démonstrations par récurrence :

EXERCICE 1 : Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE 2 : Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 3 : Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

EXERCICE 4 : Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $2^n > n$.

EXERCICE 5 : Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$.

EXERCICE 6 :

Résoudre l'inéquation $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $2^n \geq n^2$.

EXERCICE 7 : Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

EXERCICE 8 : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Montrer que la suite des dérivées $n^{\text{ième}}$ de f est donnée par la formule $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ pour tout entier n , $n \geq 1$.

EXERCICE 9 : Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$. Déterminer a_n en fonction de n . (On pourra démontrer la formule par récurrence).

EXERCICE 10 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$.

Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

En déduire que (u_n) est bien définie.

Montrer que la formule donnant u_n en fonction de n est : pour tout entier n , $u_n = \frac{5}{3n+5}$.

EXERCICE 11 : On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.

Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

EXERCICE 12 : On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

EXERCICE 13 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

EXERCICE 14 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{5}{2u_n}$.

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 3]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x}$, et montrer que si $x \in [2; 3]$ alors $f(x) \in [2; 3]$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq 3$.

EXERCICE 15 : Soit $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

EXERCICE 16 : Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$.

EXERCICE 17 : Soit $f(x) = xe^x$. Calculer la suite des dérivées $n^{\text{ième}}$ de f : $f^{(n)}(x)$ en fonction de n (pour tout entier naturel n , $n \geq 1$).

EXERCICE 18 : Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{-1}{2}$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ est constante.

EXERCICE 19 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

EXERCICE 20 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = n 2^n$.

EXERCICE 21 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $x \leq \sqrt{2 + x}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

EXERCICE 22 : Soit $f(x) = (1-2x)e^{2x}$. Montrer que la suite des dérivées $n^{\text{ième}}$ de f est donnée par la formule $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ pour tout entier n , $n \geq 1$.

EXERCICE 23 : Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la formule : $u_n = (u_0)^{2^n}$.