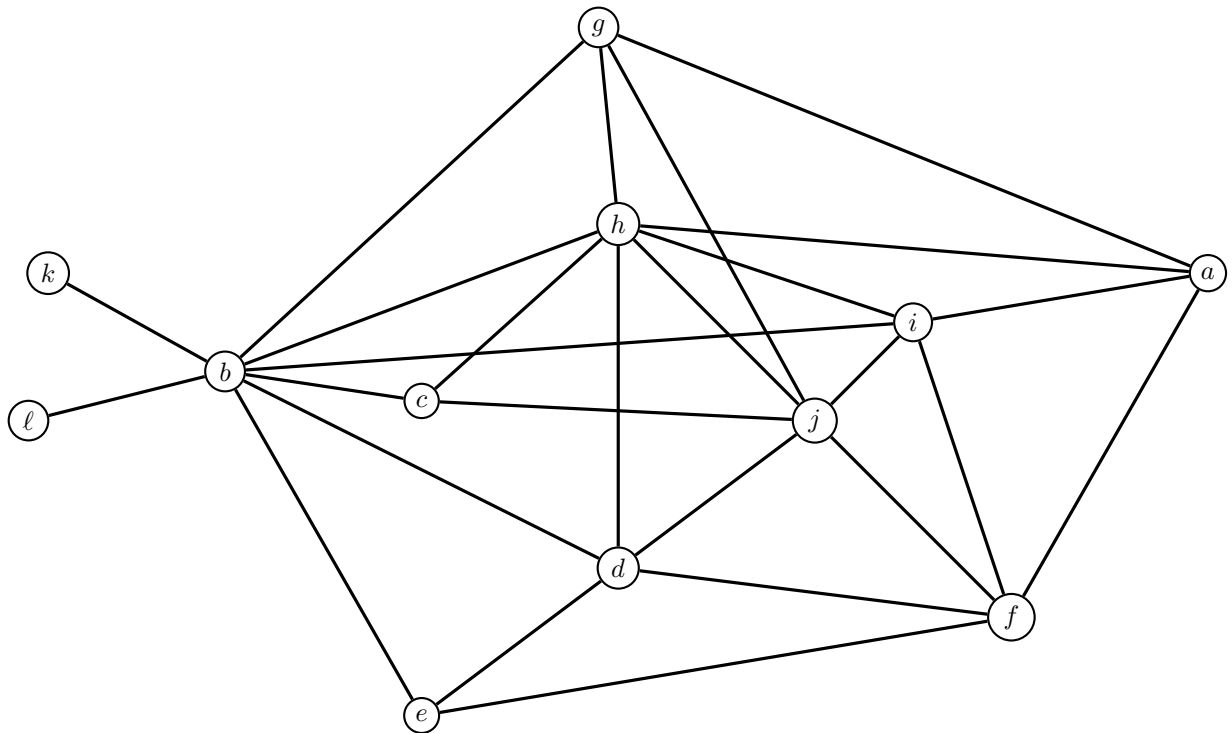


Exercice Spécialité TES : nombre chromatique d'un graphe

Pour le graphe suivant, l'objectif est de déterminer quel est le nombre chromatique.

1. Rappelez la définition du nombre chromatique d'un graphe.
2. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire à la coloration de ce graphe ?
3. Quel est le nombre maximum de couleurs nécessaire à la coloration de ce graphe ?
4. En déduire un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
5. En utilisant un algorithme de coloration, proposez une coloration possible. En déduire un nouvel encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
6. En étudiant plus particulièrement les sommets b-d-e de ce graphe et leurs sommets adjacents, montrer que 3 couleurs ne peuvent suffire ; trouver alors exactement le nombre chromatique de ce graphe.



Le **NOMBRE CHROMATIQUE** d'un graphe est le nombre minimal de couleurs qu'il faut employer pour colorer chacun des sommets de ce graphe de telle sorte que deux sommets adjacents quelconques ne soient jamais de la même couleur.

Il faut au minimum 3 couleurs car a-i-f représente un graphe complet d'ordre 3, par conséquent, aucun de ces 3 sommets ne peut être de la même couleur qu'un autre.

Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 3.

Le sommet de plus haut degré est b , de degré 8. Il faut donc au plus 9 couleurs. Le nombre chromatique est donc inférieur ou égal à 9.

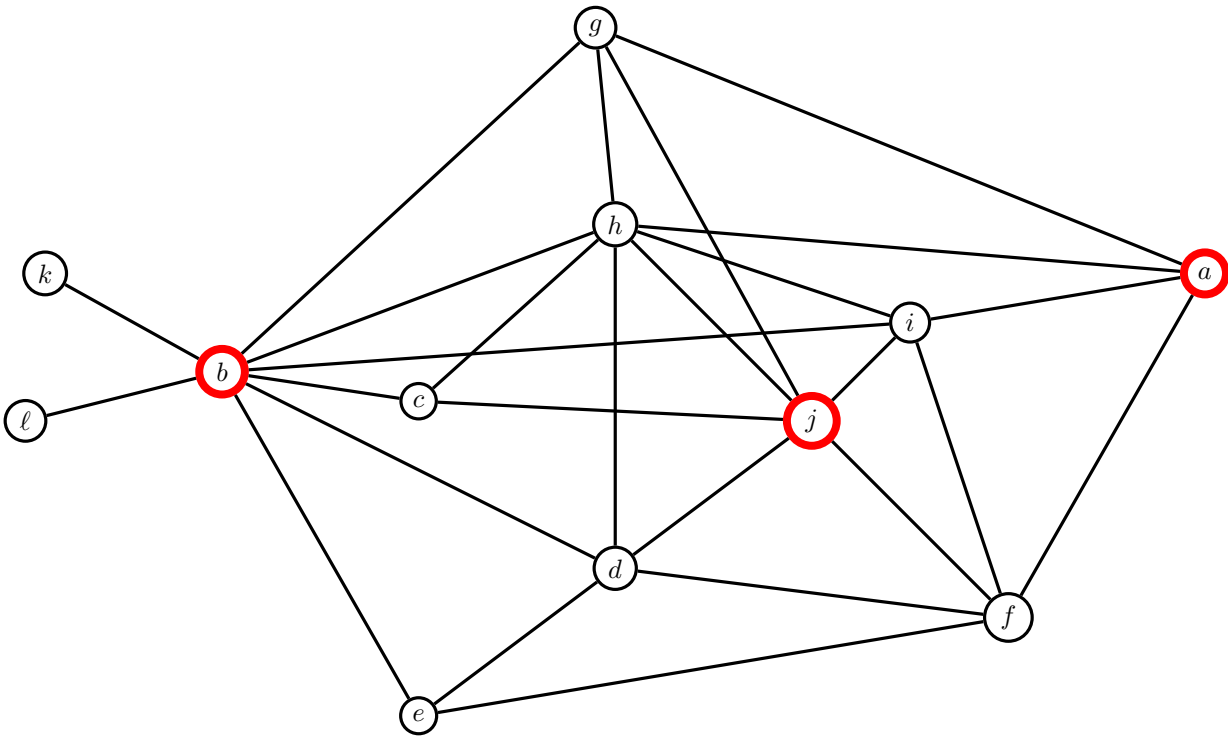
Le nombre chromatique est donc compris entre 3 et 9.

On peut classer les sommets par degré décroissant, puis les colorer :

Point	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>ℓ</i>
Degré	8	7	6	5	5	5	4	4	3	3	1	1

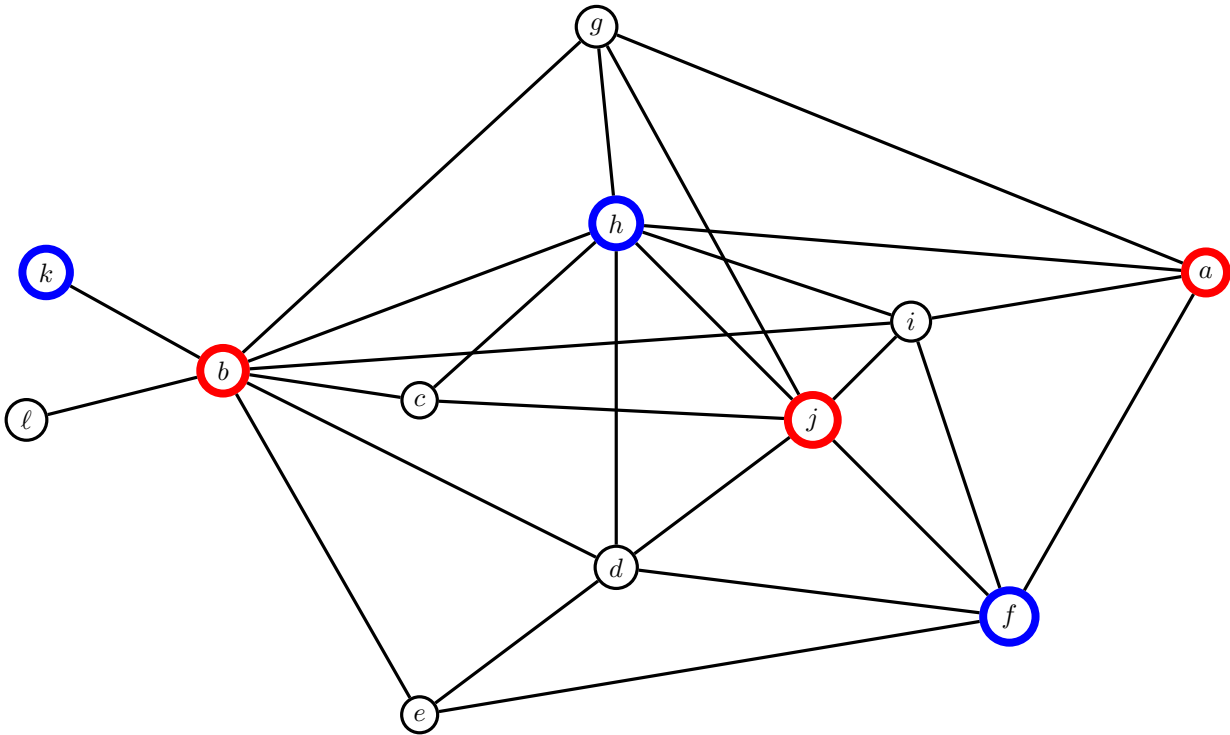
Une coloration pourrait être :
on colorie *b* en rouge ; puis dans l'ordre décroissant, les sommets non adjacents *j* et *a* en rouge.

Point	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>ℓ</i>
Degré	8	7	6	5	5	5	4	4	3	3	1	1



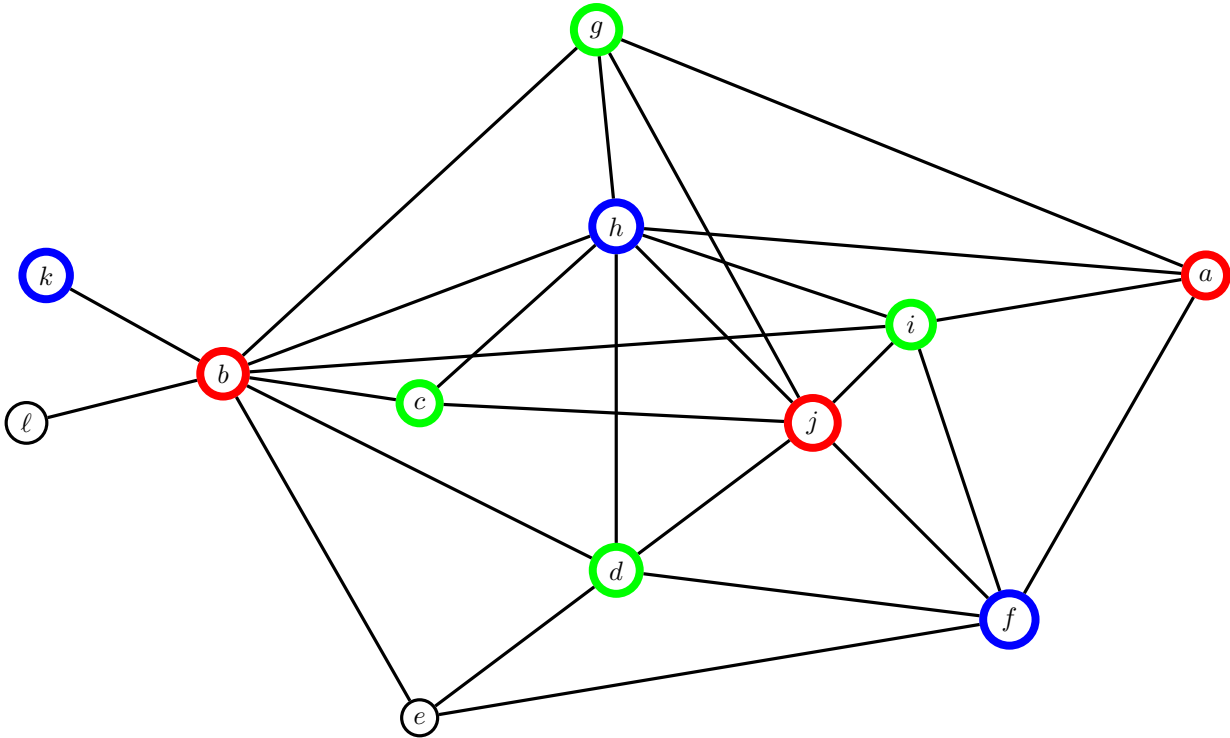
Puis on change de couleur, on colorie h en bleu ; puis dans l'ordre décroissant, les sommets non adjacents f , et k en bleu.

Point	b	h	j	d	f	i	a	g	c	e	k	ℓ
Degré	8	7	6	5	5	5	4	4	3	3	1	1



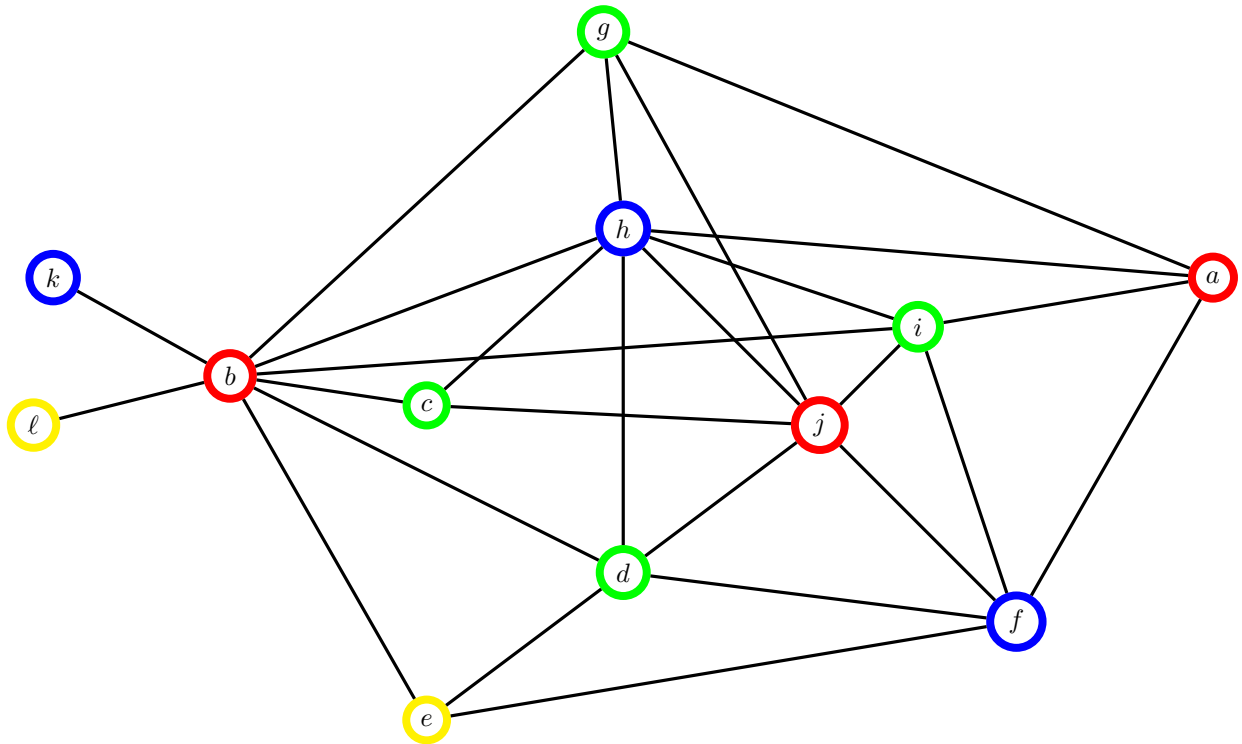
Puis on change de couleur, on colorie *d* en vert ; puis dans l'ordre décroissant, les sommets non adjacents *i*, *g* et *c* en vert.

Point	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>k</i>	<i>ℓ</i>
Degré	8	7	6	5	5	5	4	4	3	3	1	1



Puis on change de couleur, on colorie e en jaune; puis dans l'ordre décroissant, le sommet non adjacent ℓ en jaune.

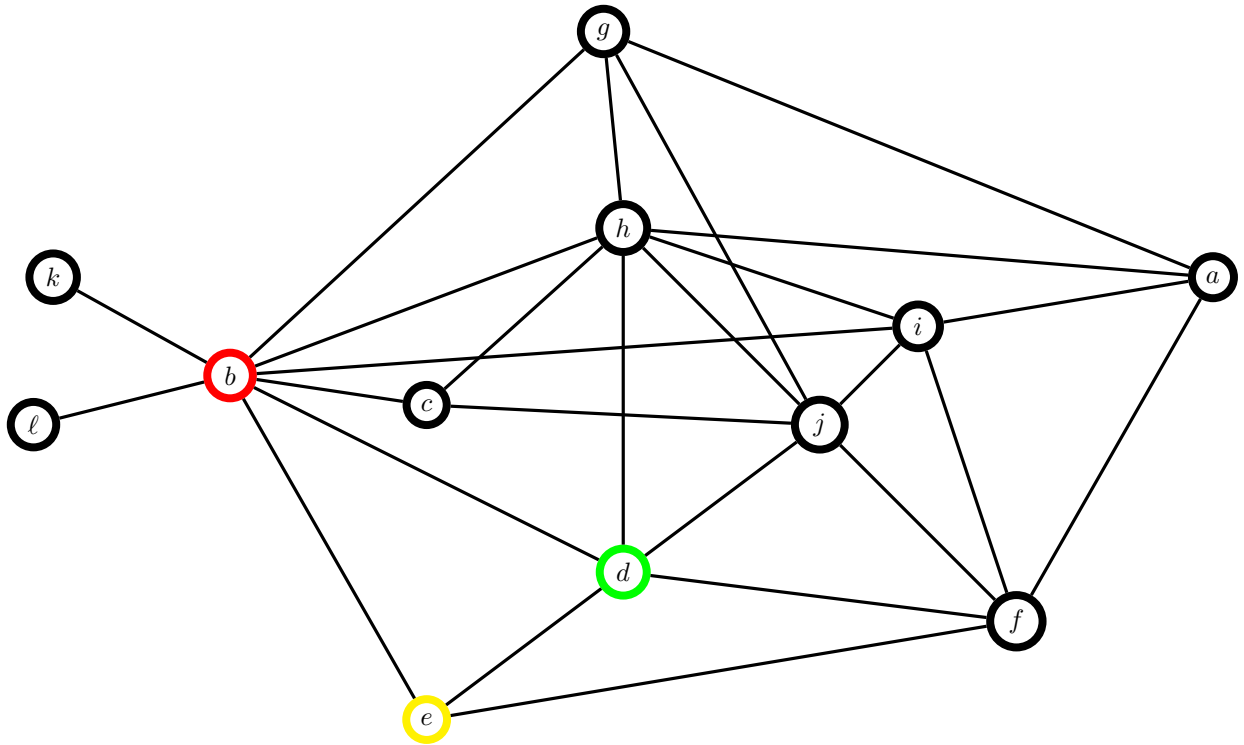
Point	b	h	j	d	f	i	a	g	c	e	k	ℓ
Degré	8	7	6	5	5	5	4	4	3	3	1	1



Ainsi, 4 couleurs suffisent ; le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4

En conclusion, le nombre chromatique est compris entre 3 et 4

Si on part du triangle b-d-e avec nécessairement trois couleurs, montrons qu'il en faut forcément une quatrième.



f n'est ni jaune ni vert, donc forcément rouge.

h n'est ni rouge ni vert, donc forcément jaune.

Mais alors j n'est ni rouge ni vert ni jaune. Donc forcément d'une quatrième couleur !

Par conséquent il faut au moins 4 couleurs.

En conclusion, le nombre chromatique est égal à 4