Géométrie dans l'espace

On supposera donc dans la suite qu'un repère orthonormé de l'espace $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est donné ; c'est à dire la donnée d'un point O qui sert d'origine et la donnée de trois vecteurs qui définissent les trois directions des axes du repère de l'espace.

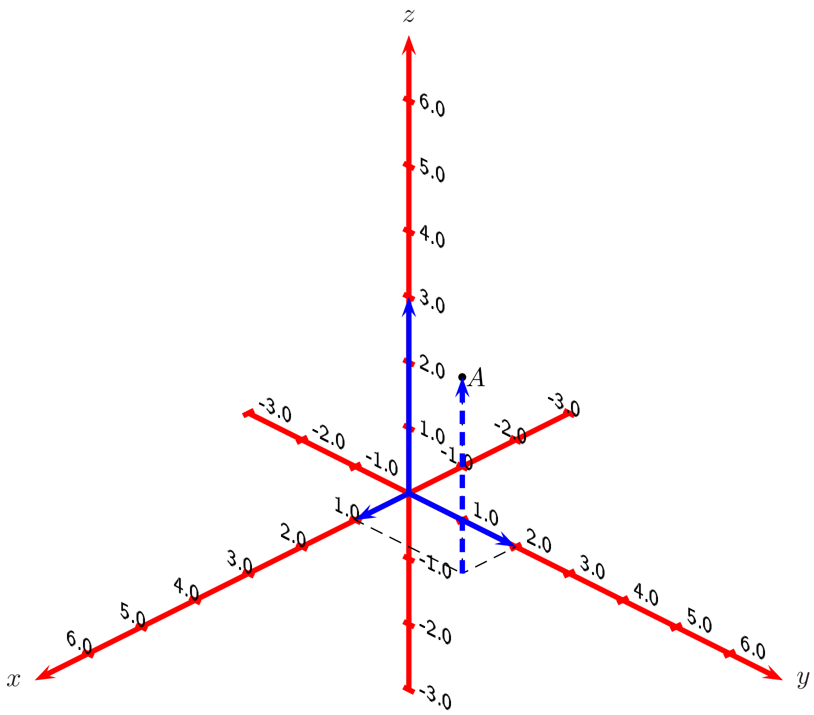
I) Repérer un point dans l'espace

Tout point M de l'espace est alors repéré par ses trois coordonnées x, y et z appelées respectivement son abscisse, son ordonnée et sa cote ; et on note $M\left(x,y,z\right)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un tel point.

On a $M\left(x,y,z\right)$ ssi on a la relation vectorielle $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{\imath}+y\overrightarrow{\jmath}+z\overrightarrow{k}$.

Exemple Un repère étant donné, on souhaite placer le point A de coordonnées données : $A\left(1,2,3\right)$

Solution : Puisque A a pour coordonnées $A\left(1,2,3\right)$, on a la relation $\overrightarrow{OA}=1\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath}+3\overrightarrow{k}$.



II) Vecteurs de l'espace

II-1) Rappels

En général, un vecteur est construit à partir de deux points, l'un étant son origine et l'autre son extrémité.
Par exemple, $\overrightarrow{AB}$ admet A comme origine et B comme extrémité.
Un vecteur (non nul) est caractérisé par une direction un sens et une norme.
Pour les calculs dans un repère, on a la formule

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Lorsque le vecteur n'est pas repéré par deux points mais nommé par une seule lettre, on notera

$$\overrightarrow{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}}) \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$$

Si $\overrightarrow{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ est donné et α est un réel, on a $\alpha\overrightarrow{u}\,(\alpha x_{\vec{u}}, \alpha y_{\vec{u}}, \alpha z_{\vec{u}})$.
Si $\overrightarrow{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $\overrightarrow{v}\,(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ sont deux vecteurs donnés, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\,(x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}, y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}, z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}})$.

II-2) Propriétés de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction même sens et même norme. Cette condition a lieu ssi leurs coordonnées sont égales.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction. Cette condition a lieu ssi il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Cette condition a lieu ssi leurs coordonnées sont proportionnelles.

Méthode : Montrer que trois points A, B et C sont alignés revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Deux vecteurs sont TOUJOURS coplanaires, mais pas toujours colinéaires.

II-3) Propriétés de trois vecteurs

Définition : combinaison linéaire de deux vecteurs.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant donnés, on appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ tout vecteur de la forme $k_1\overrightarrow{u} + k_2\overrightarrow{v}$ où k_1 et k_2 sont deux réels quelconques.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un est combinaison linéaire des deux autres.
Cette condition a lieu ssi il existe deux réels k_1 et k_2 tels que $\overrightarrow{w} = k_1\overrightarrow{u} + k_2\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{u} + k_2\overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{u} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{w}$. C'est à dire ssi l'un des vecteurs peut s'écrire à l'aide des deux autres.

Méthode : Montrer que quatre points A, B, C et D sont coplanaires revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

II-4) Autres formules

Si $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et $B\,(x_B, y_B, z_B)$ sont donnés alors le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées la moyenne de leurs coordonnées :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

Si un vecteur $\overrightarrow{u}$ est connu par ses coordonnées $\overrightarrow{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ alors sa norme se calcule dans un repère orthonormé par la formule $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2 + z_{\vec{u}}^2}$.
En particulier si deux points $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et $B\,(x_B, y_B, z_B)$ sont donnés, alors la distance AB se calcule à l'aide de la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

III) Exemples

Exercice 1

Questions :

On se donne $A\,(1, 2, 3)$ $B\,(2, 5, 7)$ $C\,(-1, 3, 4)$ et $D\,(1, 9, 12)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Que peut-on en conclure sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$? Et sur les points A, B, C et D ?

Solution :

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\5-2\\7-3\end{pmatrix}$ c'est à dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$

On a de même : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\7\\9\end{pmatrix}$

2. On cherche α et β réels tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

Puisque $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\7\\9\end{pmatrix}$ et $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-2\beta\\3\alpha+\beta\\4\alpha+\beta\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ssi $\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & - & 2\beta & = & 0\\ 3\alpha & + & \beta & = & 7\\ 4\alpha & + & \beta & = & 9\end{array}\right.$

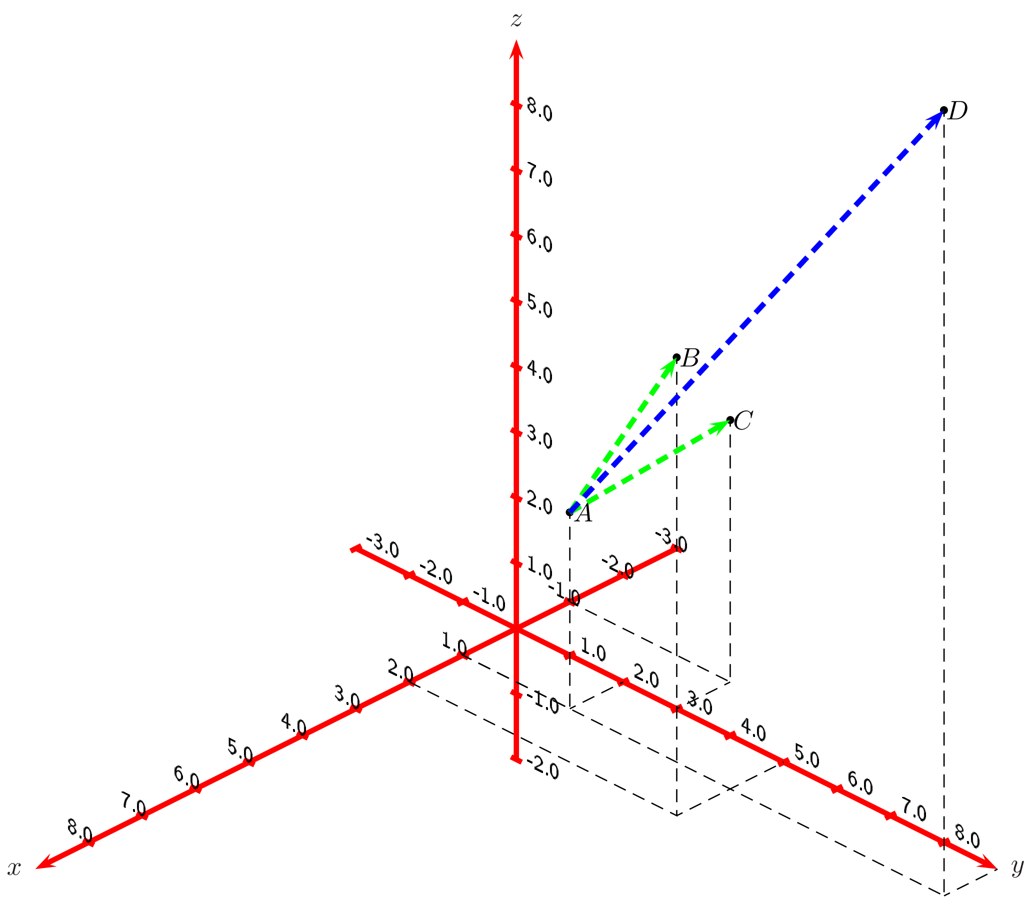
On a un système de trois équations à deux inconnues. On résoud d'abord $\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & - & 2\beta & = & 0\\ 3\alpha & + & \beta & = & 7\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & - & 2\beta & = & 0\\ 3\alpha & + & \beta & = & 7\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc}\alpha & - & 2\beta & = & 0\\ 7\alpha & & & = & 14\end{array}\right. \quad (L1+2L_2) \iff \left\{\begin{array}{ccc}\alpha & = & 2\\ \beta & = & 1\end{array}\right.$$

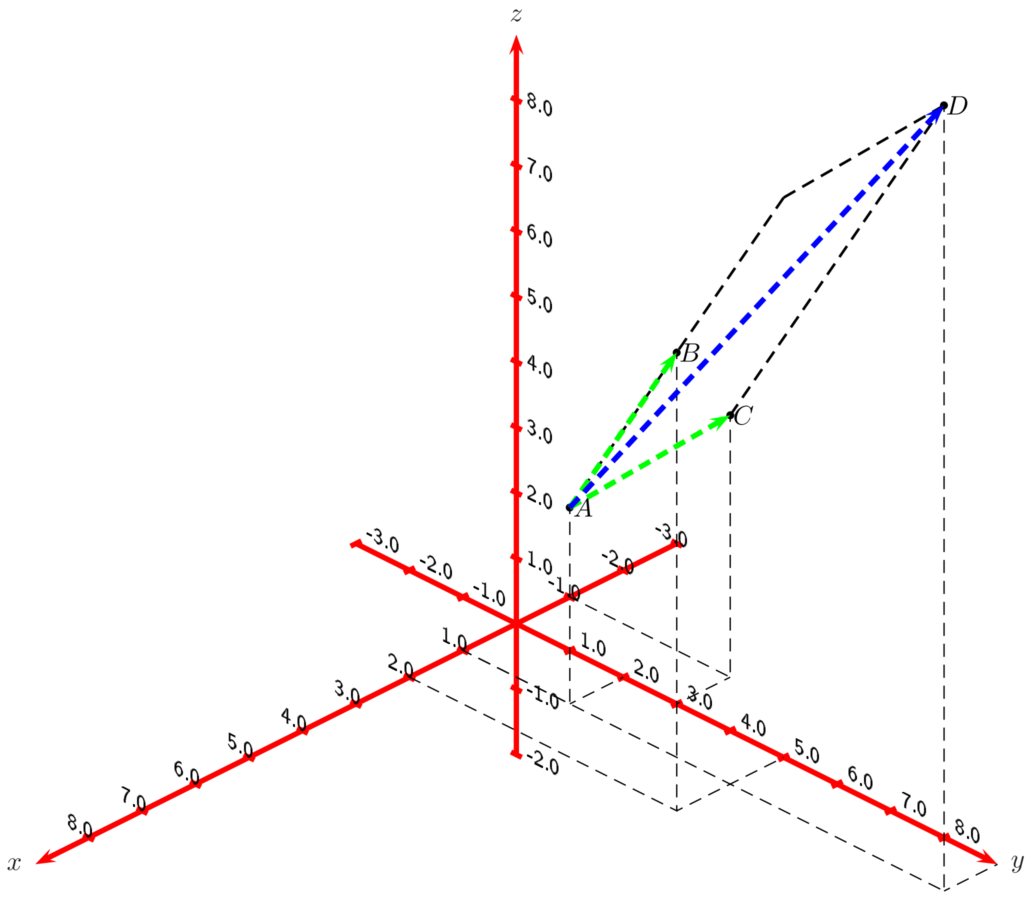
On a donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est donc combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

Remarque : On pouvait "remarquer" (en cherchant à la main) que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ont les mêmes coordonnées. Donc que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Mais cette méthode est plus hasardeuse.



Rappel : pour pouvoir trouver les nombres α et β sur le graphique, il faut projeter parallèlement aux directions de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le point D, comme sur le dessin suivant :
Cette méthode n'est que très approximative mais peut aider.



IV) Orthogonalité dans l'espace

IV-1) Rappels

Deux droites sont orthogonales ssi les parallèles à ces droites menées à partir d'un même point sont perpendiculaires.
Si deux droites sont orthogonales et sont coplanaires alors elles ont un point en commun et sont perpendiculaires, dans le plan qu'elles définissent.

Par un point donné il passe un unique plan orthogonal à une droite donnée.

IV-2) Orthogonalité et coordonnées

Si $\overrightarrow{u}\ (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $\overrightarrow{v}\ (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ sont deux vecteurs donnés, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ssi leurs coordonnées vérifient $x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}z_{\vec{v}} = 0$

Théorème : équation cartésienne d'un plan

Si A est un point donné et $\overrightarrow{n}\ (a, b, c)$ est un vecteur non nul donné, par A il passe un unique plan $\mathcal{P}$ orthogonal à la direction de $\overrightarrow{n}$.
Ce plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = d$, où d est une constante dépendant de A.
Le vecteur $\overrightarrow{n}\ (a, b, c)$ est appelé vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre réels avec (a, b, c) non tous nuls, l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) vérifiant $ax + by + cz = d$ est un plan de vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\ (a, b, c)$.