Géométrie dans l'espace : systèmes d'équations paramétriques

Introduction :
On appelle système d'équations paramétriques (ou parfois équations paramétriques) tout système résolu dont les solutions (x, y et z pour la géométrie dans l'espace) dépendent de paramètre(s) (un ou deux paramètres dans le cas de la géométrie dans l'espace).

I) Équation de droite

Géométriquement, une droite de l'espace est déterminée par un point et un vecteur directeur ou comme étant l'intersection de deux plans non parallèles. Pour le calcul, chacun de ces points de vue va induire un certain type de calcul : un système d'équations paramétriques ou un système de deux équations cartésiennes de plans

1) Droite déterminée par un point et un vecteur directeur

Si D est la droite passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\ (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ comme vecteur directeur, alors un système d'équations paramétriques de la droite D est :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda\, x_{\vec{u}} \\ y = y_A + \lambda\, y_{\vec{u}} \\ z = z_A + \lambda\, z_{\vec{u}} \end{cases} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

En effet, un point $M\,(x, y, z)$ appartient à la droite (D) ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{u}$.

Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{u}$ ssi

$$\begin{cases} x - x_A = \lambda\, x_{\vec{u}} \\ y - y_A = \lambda\, y_{\vec{u}} \\ z - z_A = \lambda\, z_{\vec{u}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_A + \lambda\, x_{\vec{u}} \\ y = y_A + \lambda\, y_{\vec{u}} \\ z = z_A + \lambda\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$

Exemple :
$\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ représente la droite passant par le point $A\,(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\ (4, 2, -1)$

2) Droite déterminée comme intersection de deux plans

Si une droite de l'espace est déterminée par l'intersection de deux plans non parallèles alors elle est défine par un système de deux équations cartésiennes de plans. Ces plans étant non parallèles.
On a donc un système non résolu de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Remarque : Les plans admettant comme équations cartésiennes $ax+by+cz = d$ et $a'x+b'y+c'z = d'$ admettent respectivement $\overrightarrow{u}\ (a, b, c)$ et $\overrightarrow{u'}\ (a', b', c')$ comme vecteur normal. Les plans ne sont pas parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires.

Exemple :
Les points $M\,(x, y, z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ représentent l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, où $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x + y + z = 3$, et $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $x - y + 2z = 0$.
$\mathcal{P}$ admet comme vecteur normal $\overrightarrow{u}\ (1, 1, 1)$ et $\mathcal{Q}$ admet comme vecteur normal $\overrightarrow{u'}\ (1, -1, 2)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas proportionnelles, ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles ; leur intersection est donc une droite.
REMARQUE : L'inconvenient avec ce système, c'est qu'on ne connait pas de points de la droite. Pour ce faire, il faut et il suffit d'imposer l'une des coordonnées et de résoudre le système afin de trouver les deux autres. Par exemple, si on impose $x = 0$, on trouve $y = 2$ et $z = 1$. Donc la droite passe par le point $B\,(0, 2, 1)$.

3) Méthodes de calcul

• Pour passer d'un système d'équations paramétriques à un système de deux équations cartésiennes, il faut et il suffit de trouver deux combinaisons linéaires qui permettent d'éliminer le paramètre.
EXEMPLE :

Si (x, y, z) vérifient le système $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ alors $x - 2y = -3$ et $x + 4z = 13$

donc la droite (D) peut être aussi définie par le système $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + 4z = 13 \end{cases}$

• Pour passer d'un système de deux équations cartésiennes à un système d'équations paramétriques, il faut et il suffit de choisir l'une des inconnues (x, y ou z) comme paramètre, puis de résoudre le système.
EXEMPLE :

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ on choisit z comme paramètre : le système est équivalent à $\begin{cases} x + y = 3 - z \\ x - y = -2z \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}z \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}z \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}z \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}z \\ z = z \end{cases}$

Par conséquent, les points dont les coordonnées vérifient le sytème $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ sont les points de la droite passant par $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

II) ÉQUATION DE PLAN

1) Plan déterminé par un point et deux vecteurs

Si $\mathcal{P}$ est un plan admettant comme repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires, alors un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ est :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha\, x_{\vec{u}} + \beta\, x_{\vec{v}} \\ y = y_A + \alpha\, y_{\vec{u}} + \beta\, y_{\vec{v}} \\ z = z_A + \alpha\, z_{\vec{u}} + \beta\, z_{\vec{v}} \end{cases} \qquad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ réels}$$

En effet, un point $M\,(x, y, z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires. Ceci a lieu ssi il existe α et β réels tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ et $\alpha\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha\, x_{\vec{u}} \\ \alpha\, y_{\vec{u}} \\ \alpha\, z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\beta\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \beta\, x_{\vec{v}} \\ \beta\, y_{\vec{v}} \\ \beta\, z_{\vec{v}} \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ ssi

$$\begin{cases} x - x_A = \alpha\, x_{\vec{u}} + \beta\, x_{\vec{v}} \\ y - y_A = \alpha\, y_{\vec{u}} + \beta\, y_{\vec{v}} \\ z - z_A = \alpha\, z_{\vec{u}} + \beta\, z_{\vec{v}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_A + \alpha\, x_{\vec{u}} + \beta\, x_{\vec{v}} \\ y = y_A + \alpha\, y_{\vec{u}} + \beta\, y_{\vec{v}} \\ z = z_A + \alpha\, z_{\vec{u}} + \beta\, z_{\vec{v}} \end{cases}$$

EXEMPLE : $\begin{cases} x = 2 + 3\alpha + 5\beta \\ y = 3 + 2\alpha + 6\beta \\ z = 4 + \ \alpha - \beta \end{cases}$ est l'équation cartésienne du plan défini par le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Avec $A\,(2, 3, 4)$ et $\overrightarrow{u}\,(3, 2, 1)$ et $\overrightarrow{v}\,(5, 6, -1)$.