

Étude des suites récurrentes de la forme

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$$

RAPPELS : Une suite (u_n) est dite **définie par récurrence** si on connaît le terme initial u_0 et une relation liant un terme u_{n+1} au(x) terme(s) qui le précède(nt).

Exemples :

• (u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_0 = 3$ et $u_1 = 2u_0 = 6$; puis $u_2 = 2u_1 = 12$; puis $u_3 = 24$...

Il n'est pas difficile de trouver la « formule générale » explicite : $u_n = 3 \times 2^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On démontre cette formule par récurrence ou bien en se fondant sur le cours sur les suites géométriques (cf rappels du paragraphe suivant).

• (v_n) est la suite définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 2v_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $v_0 = 2$ et $v_1 = 2v_0 + 5 = 9$; puis $v_2 = 2v_1 + 5 = 23$; puis $v_3 = 51$...

L'objectif est souvent de passer d'une formule de récurrence à une formule "explicite" donnant v_n directement en fonction de n . C'est l'objet de ce chapitre du cours.

1) Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

DÉFINITION : Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si elle est définie par récurrence par une relation de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, où r est une constante appelée raison de la suite arithmétique.

Autrement dit, pour passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1} on **ajoute** toujours la même constante r .

PROPRIÉTÉ : Si une suite (u_n) est arithmétique alors son terme général s'écrit sous la forme

$$u_n = u_0 + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite ne commence qu'à partir de u_1 , on a $u_n = u_1 + (n-1)r$ pour tout $n \geq 1$; ou $u_n = u_2 + (n-2)r$ pour tout $n \geq 2$, on parle de "décalage".

MÉTHODE : Pour étudier si une suite (u_n) est arithmétique, on est amené à montrer la différence entre deux termes successifs est constante, c'est alors la raison r de la suite. Par exemple, on calcule $u_{n+1} - u_n$, ou $u_n - u_{n-1}$.

DÉFINITION : Une suite (u_n) est dite **géométrique** si elle est définie par récurrence par une relation de la forme $u_{n+1} = u_n \times q$, où q est une constante appelée raison de la suite géométrique.

Autrement dit, pour passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1} on **multiplie** toujours par la même constante q .

PROPRIÉTÉ : Si une suite (u_n) est géométrique alors son terme général s'écrit sous la forme

$$u_n = u_0 \times q^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si la suite ne commence qu'à partir de u_1 , on a $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$; ou $u_n = u_2 \times q^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$, on parle de "décalage".

MÉTHODE : Pour étudier si une suite (u_n) est géométrique, on est amené à montrer le quotient de deux termes successifs est constante, c'est alors la raison q de la suite. Par exemple, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ou $\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

2) Étude des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$

On considère α et β deux réels fixés. Et on considère une suite (u_n) définie par récurrence à partir de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$.

Cas particuliers :

Si $\alpha = 1$ alors la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = u_n + \beta$, donc (u_n) est arithmétique de raison β , et son terme général est $u_n = u_0 + n\beta$.

Si $\beta = 0$ alors la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = \alpha u_n$, donc (u_n) est géométrique de raison α , et son terme général est $u_n = u_0 \times \alpha^n$.

Cas général :

Si $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$ alors la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique, on parle de suite « arithmético-géométrique ».

L'objectif est de passer de la formule de récurrence $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$ à une formule "explicite" donnant u_n directement en fonction de n .

PROPRIÉTÉ : Il existe ℓ tel que $\ell = \alpha\ell + \beta$.

En effet l'équation $\ell = \alpha\ell + \beta$ est équivalente à $\ell(1 - \alpha) = \beta$ soit équivalente à $\ell = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ car $\alpha \neq 1$.

PROPRIÉTÉ : La suite (z_n) définie par $z_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison α .

En effet, si on définit la suite (z_n) par la relation $z_n = u_n - \ell$, alors on a $\begin{cases} u_{n+1} &= \alpha u_n + \beta \\ \ell &= \alpha\ell + \beta \end{cases}$

Donc par soustraction membre à membre, on a : $u_{n+1} - \ell = \alpha(u_n - \ell)$. Soit $z_{n+1} = \alpha z_n$.

Par conséquent, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison α .

PROPRIÉTÉ : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $u_n = (u_0 - \ell) \times \alpha^n + \ell$

Par conséquent, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison α . L'expression de son terme général est donc $z_n = z_0 \times \alpha^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais puisque la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $z_n = u_n - \ell$, on a $z_0 = u_0 - \ell$. Donc $z_n = (u_0 - \ell) \times \alpha^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais aussi, puisque la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $z_n = u_n - \ell$, on a $u_n = z_n + \ell = (u_0 - \ell) \times \alpha^n + \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Comportement asymptotique des suites récurrentes $u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$

Si $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 0$ alors la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique, on parle de suite « arithmético-géométrique ».

Elle vérifie la relation $u_n = (u_0 - \ell) \times \alpha^n + \ell$ pour tout entier n .

On est donc amené à distinguer les cas suivants :

- Si $|\alpha| < 1$ alors la suite géométrique (α^n) tend vers 0. Par conséquent, (u_n) tend vers ℓ . La suite (u_n) est donc convergente (elle tend vers une limite finie).
- Si $\alpha > 1$ alors la suite géométrique (α^n) tend vers $+\infty$. Par conséquent, (u_n) tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ selon le signe de $u_0 - \ell$. La suite (u_n) est donc divergente (elle tend vers une limite infinie).
- Si $\alpha < -1$ alors la suite géométrique (α^n) oscille (change de signe une fois sur 2) de plus en plus loin de 0. Par conséquent, (u_n) est divergente (elle ne tend vers aucune limite, ni finie ni infinie) sauf si $u_0 = \ell$, auquel cas la suite (u_n) est constante. De plus, la suite (u_n) est non bornée.
- Le cas $\alpha = 1$ a été exclu dès le départ car la suite (u_n) serait arithmétique, cf paragraphe 1.
- Si $\alpha = -1$ alors la suite géométrique $((-1)^n)$ oscille constamment entre la valeur 1 et la valeur -1 (elle prend la valeur 1 ou -1 une fois sur 2). Par conséquent, (u_n) est divergente (elle ne tend vers aucune limite, ni finie ni infinie) sauf si $u_0 = \ell$, auquel cas la suite (u_n) est constante. De plus, la suite (u_n) est bornée.