

Exercices sur les suites : Démonstration par récurrence.

Exercice 1: Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2: Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3: Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4: Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $2^n > n$.

Exercice 5: Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$.

Exercice 6:

Résoudre l'inéquation $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $2^n \geq n^2$.

Exercice 7: Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

Exercice 8: Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrer que la suite des dérivées $n^{\text{ième}}$ de f est donnée par la formule $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ pour tout entier n , $n \geq 1$

Exercice 9: Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$. Déterminer a_n en fonction de n . (On pourra démontrer la formule par récurrence).

Exercice 10: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$.

Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

En déduire que (u_n) est bien définie.

Montrer que la formule donnant u_n en fonction de n est : pour tout entier n , $u_n = \frac{5}{3n+5}$.

Exercice 11: On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$.

Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

Exercice 12: On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

Exercice 13: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

Exercice 14: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{5}{2u_n}$.

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 3]$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2x}$, et montrer que si $x \in [2; 3]$ alors $f(x) \in [2; 3]$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 15: Montrer que pour tout entier naturel n , $(i)^{4n+2} = -1$.

Exercice 16: Soit $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 17: Pour tout entier naturel n , $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$.

Exercice 18: Soit $f(x) = xe^x$. Calculer la suite des dérivées $n^{\text{ième}}$ de f : $f^{(n)}(x)$ en fonction de n (pour tout entier naturel n , $n \geq 1$).

Exercice 19: Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{-1}{2}$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ est constante.

Exercice 20: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 21: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = n 2^n$.

Exercice 22: Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $x \leq \sqrt{2 + x}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 23: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (x + 1)e^{-x}$.

Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n , $u_n \in [1; 2]$.

Exercice 24: Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 4 - \frac{\ln(x)}{4}$.

Soit $I = [3; 4]$. Montrer que l'image de I par g est incluse dans I .

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

Déduire, par récurrence, de la question précédente que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

Exercice 25: Soit $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$. Montrer que la suite des dérivées $n^{\text{ième}}$ de f est donnée par la formule $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$ pour tout entier n , $n \geq 1$.

Exercice 26: Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la formule : $u_n = (u_0)^{2^n}$.

Exercice 27:

Exercice 28:

Exercice 29:

Exercice 30:

Exercice 31: