

Exemples de démonstrations par récurrence.

Exemple 1 :

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons P_n la propriété : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Initialisation :

La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $1 = \frac{1(1+1)}{2}$?

$\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.

- Hérité :

Supposons que pour un entier n , $n \geq 1$ on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; montrons alors que $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = [1 + 2 + \dots + n] + (n+1)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Donc

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

De plus, on a :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc on a $1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ et P_{n+1} est vraie.

- Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

C'est à dire : pour tout n entier, $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 3 :

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Notons P_n la propriété : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- Initialisation :

La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$?

$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. Donc P_1 est vraie.

- Hérité :

Supposons que pour un entier n , $n \geq 1$ on a : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$; montrons alors que $1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

On a

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = [1^3 + 2^3 + \dots + n^3] + (n+1)^3$$

or d'après l'hypothèse de récurrence : $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Donc

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

De plus, on a :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

Et on reconnaît l'identité remarquable $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.

Donc on a $1^3 + 2^3 + \dots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ et P_{n+1} est vraie.

- Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

C'est à dire : pour tout n entier, $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exemple 5 :

Montrer que pour tout entier n , $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$

Notons P_n la propriété : $2^{n-1} \leq n!$

- Initialisation :

La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $2^0 \leq 1!$?

$2^0 = 1$ et $1! = 1$. Donc P_1 est vraie.

- Hérité :

Supposons que pour un entier $n \geq 1$ on a : $2^{n-1} \leq n!$; montrons alors que $2^n \leq (n+1)!$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $2^{n-1} \leq n!$. Donc $2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times (n!)$

Or $(n+1)! = (n+1) \times (n!)$. Donc puisque $1 \leq n$, $2 \leq n+1$ et $2 \times (n!) \leq (n+1) \times (n!) = (n+1)!$

Et on a donc $2^n \leq 2 \times (n!) \leq (n+1)!$

Donc $2^n \leq (n+1)!$ et P_{n+1} est vraie.

- Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

C'est à dire : pour tout $n \geq 1$, $2^{n-1} \leq n!$

Exemple 7 :

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

Démonstration :

Montrons par récurrence que $u_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons P_n la propriété : $u_n = 3$.

- Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 = 3$?

Ceci est vrai d'après l'énoncé. Donc P_0 est vraie.

- Hérité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 3$; montrons alors que $u_{n+1} = 3$.

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3}$$

car d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = 3$.

De plus, on a :

$$\frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3} = 3$$

Donc on a $u_{n+1} = 3$ et P_{n+1} est vraie.

- Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$.

Exemple 10 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$.

Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

En déduire que (u_n) est bien définie.

Démonstration :

Montrons par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .

Notons P_n la propriété : $u_n \geq 0$.

- Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 \geq 0$?

Ceci est vrai car d'après l'énoncé $u_0 = 1$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq 0$; montrons alors que $u_{n+1} \geq 0$.

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq 0$. Donc $5u_n \geq 0$ et $3u_n + 5 \geq 5 > 0$.

Par conséquent, $\frac{5u_n}{3u_n + 5} \geq 0$. Donc on a $u_{n+1} \geq 0$ et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Puisque l'on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_n + 5 > 0$. Et la suite (u_n) est bien définie.

Exemple 16 :

Soit $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Notons P_n la propriété : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

• Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $(1+x)^0 \geq 1$?

Ceci est vrai car $(1+x)^0 = 1$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$; montrons alors que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $(1+x)^n \geq 1+nx$. Et $1+x \geq 0$. Donc on a $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$.

Et $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

Par conséquent $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exemple 20 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Notons P_n la propriété : $2 \leq u_n \leq 3$.

• Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $2 \leq u_0 \leq 3$?

Ceci est vrai car $u_0 = 2$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq u_n \leq 3$; montrons alors que $2 \leq u_{n+1} \leq 3$.

$u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $2 \leq u_n \leq 3$. Donc $8 \leq 6+u_n \leq 9$. Et $2\sqrt{2} \leq \sqrt{6+u_n} \leq 3$.

De plus, $2 \leq 2\sqrt{2}$ donc on a $2 \leq \sqrt{6+u_n} \leq 3$.

Et par conséquent $2 \leq u_{n+1} \leq 3$ et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_{n+1} \leq 3$.

Exemple 21 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = n2^n$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = n 2^n$.

Notons P_n la propriété : $u_n = n 2^n$.

• Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 = 0$?

Ceci est vrai d'après l'énoncé. Donc P_0 est vraie.

• Héritéité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = n 2^n$; montrons alors que $u_{n+1} = (n+1) 2^{n+1}$.

$u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = n 2^n$.

Donc $2(u_n + 2^n) = 2(n 2^n + 2^n) = 2(2^n(n+1)) = 2^{n+1}(n+1)$.

Par conséquent $u_{n+1} = (n+1) 2^{n+1}$ et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n 2^n$.

Exemple 22 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $x \leq \sqrt{2 + x}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Notons P_n la propriété : $0 \leq u_n \leq 2$.

• Initialisation :

La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $0 \leq u_0 \leq 2$?

Ceci est vrai car $u_0 = 0$. Donc P_0 est vraie.

• Héritéité :

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 2$; montrons alors que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq 2$. Donc $2 \leq 2 + u_n \leq 4$. Et $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$.

De plus, $0 \leq \sqrt{2}$ donc on a $0 \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$.

Et par conséquent $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Montrons que si $x \in [0; 2]$ alors $x \leq \sqrt{2 + x}$.

Soit $x \in [0; 2]$ fixé; alors $x \leq \sqrt{2 + x}$ équivaut à $x^2 \leq 2 + x$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Or si on pose $P(x) = x^2 - x - 2$, polynôme de degré 2, on trouve $\Delta = 9$ et les racines -1 et 2 . Et $P(x)$ est négatif entre les racines. Donc on a en particulier $x^2 - x - 2 \leq 0$ pour tout $x \in [0; 2]$.

On a donc $x \leq \sqrt{2 + x}$ pour tout $x \in [0; 2]$.

Puisque $x \leq \sqrt{2 + x}$ pour tout $x \in [0; 2]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq \sqrt{2 + u_n}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_{n+1}$.

Et la suite (u_n) est croissante.