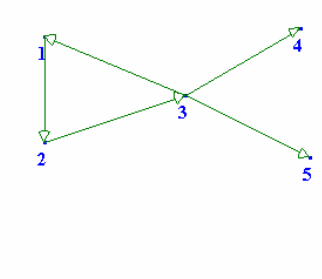
généralités sur les graphes

Un graphe est défini :

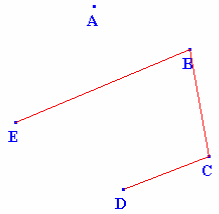
1) par un ensemble S de points (appelés « **sommets** »), le plus souvent symbolisés par des numéros 1 , 2 , 3, etc…. , ou par des lettres a, b, c…
2) par des liens reliant certains sommets entre eux ; ces liens qui créent donc des couples de sommets, se nommeront (et se représenteront sur le dessin) par des « **arcs** » ou des « **arêtes** » selon que le graphe est « **orienté** » ou « **non orienté** ».

Exemple de graphe orienté



Arcs du graphe
(1,2) (2,3) (3,1) (3,4) (3,5)

Exemple de graphe non orienté



Arêtes du graphe
(B,C) (B,E) (C,D)

Questions élémentaires sur les graphes

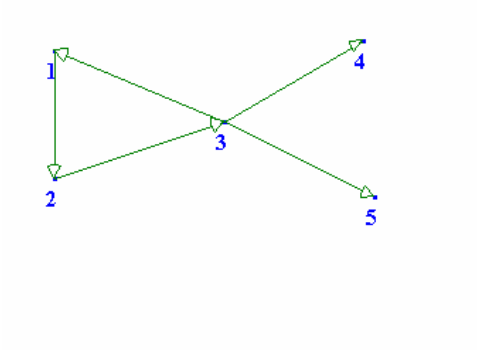
Les questions que l'on peut vous poser :	*propriétés correspondante des graphes :*	*techniques mises en œuvre :*
Trouver le nombre d'arêtes d'un graphe donné.	La somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.	
Associer une matrice à un graphe donné (orienté ou non). Associer un graphe à une matrice carrée donnée.	Une matrice associée à un graphe d'ordre *n* est une matrice carrée d'ordre *n*. Le terme situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne vaut *k*, le nombre d'arêtes d'origine *i* et d'extrémité *j*.	
Déterminer le nombre de chaînes de longueur donnée qui relient deux sommets d'un graphe orienté ou non. Exhiber ces chaînes.	Lorsque A désigne une matrice associée à un graphe, le terme de A^r situé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne est égal au nombre de chaînes de longueur *r* qui relient le sommet *i* au sommet *j*.	Eventuellement, penser à calculer un terme donné de A^r sans calculer tous les termes.
Rechercher le diamètre d'un graphe.	C'est la plus grande distance entre deux sommets quelconques du graphe.	Prendre les sommets deux à deux, calculer leur distance, et garder le plus grand nombre trouvé.

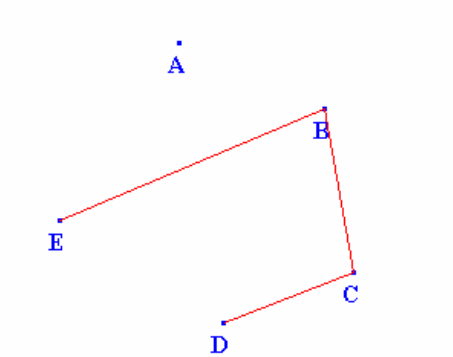
petit vocabulaire de la théorie des graphes :

Terme	Signification
adjacence	deux arcs sont adjacents s'ils ont une extrémité commune ; deux sommets sont adjacents s'il existe un arc, ou une arête, les reliant
arc	couple (x,y) dans un graphe orienté
arête	nom d'un arc, dans un graphe non orienté
boucle	arc reliant un sommet à lui-même
Chaîne ou chemin	Suite de sommets adjacents formant une suite d'arcs connexes reliant un sommet à un autre. Par exemple (a;b) (b;c) (c;d) (d;b) (b;e) est un chemin reliant a à e ; on le note (a,b,c,d,b,e) ou a-b-c-d-b-e
chemin semi-eulérien	désigne un chemin simple passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ; il n'existe pas toujours…
Chemin hamiltonien	désigne un chemin simple qui passe une fois et une seule par chaque sommet
chromatique (nombre)	c'est le nombre minimal de couleurs de couleurs nécessaires pour colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents aient la même couleur ; (cf algorithme de coloration).
connexe	Un graphe est connexe s'il existe toujours une chaîne, ou un chemin, entre deux sommets quelconques. Par exemple le plan d'une ville doit être connexe.
complet	un graphe est complet si quels que soient deux sommets distincts, il existe un arc (ou une arête) les reliant dans un sens ou dans l'autre
Cycle eulérien	désigne un cycle (chemin en boucle) simple passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe; il n'existe pas toujours…
cycle	Un cycle est une chaîne dont l'extrémité initiale coïncide avec l'extrémité finale
degré d'un sommet	nombre d'arête issues d'un sommet dans un graphe non orienté ; nombre d'arcs arrivant ou partant d'un sommet dans un arc orienté ;
diamètre	le diamètre d'un graphe est la plus grande de toutes les distances entre deux sommets quelconques du graphe
distance	la distance entre deux sommets d'un graphe est la plus petite longueur des chaînes, ou des chemins, reliant ces deux sommets.
Eulérien	Voir chemin semi-eulérien ou cycle eulérien.
graphe orienté	désigne un graphe où le couple (x,y) n'implique pas nécessairement l'existence du couple (y,x) ; sur le dessin, les liens entre les sommets sont des flèches
longueur d'un chemin (ou d'une chaîne)	nombre d'arêtes de la chaîne (exemple a-b-c est de longueur 2)
ordre d'un graphe	nombre de sommets du graphe
prédécesseur	dans l'arc (x;y), x est prédécesseur de y
rang	le rang d'un sommet est la plus grande longueur des arcs se terminant à ce sommet
Sous-graphe	le graphe G' est un sous graphe de G si l'ensemble des sommets de G' est inclus dans l'ensemble des sommets de G, et si l'ensemble des arcs de G' est égal au sous-ensemble des arcs de G reliant entre eux tous les sommets de G' ; on a donc retiré de G certains sommets, et tous les arcs adjacents à ces sommets ; par exemple, le graphe des routes de Bretagne est un sous-graphe du graphe des routes de France.
stable	soit un graphe G (E ; R), et F un sous-ensemble de sommets. On dit que F est un sous ensemble stable de E s'il n'existe aucun arc du graphe reliant deux sommets de F.
successeur	dans l'arc (x;y), y est successeur de x

Matrice associée à un graphe :

Pour le traitement informatique, un graphe possède une matrice booléenne associée A où chaque ligne indique les successeurs par un 1, et l'absence de successeur par un 0:





$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'un graphe orienté n'est pas nécessairement symétrique.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'un graphe non orienté est symétrique.

Remarques :

1) Quand on calcule A^p en calcul matriciel (à la calculatrice pour les grandes puissances), le terme a_{ij} de la matrice puissance est égal ***au nombre de chemins de longueur p*** reliant le sommet i au sommet j.
2) Les « 0 » présents dans la matrice A^p signifient un chemin de longueur p impossible.