Exemples de démonstrations par récurrence

Exemple 1 :
Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 3 :
Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exemple 5 : Montrer que pour tout entier n, $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$

Exemple 7 : Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\dfrac{5u_n+3}{u_n+3}$ est constante.

Exemple 10 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{3u_n+5}$.
Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
En déduire que (u_n) est bien définie.

Exemple 15 :
Soit $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exemple 19 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Exemple 20 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=2(u_n+2^n)$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n=n\,2^n$.

Exemple 21 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.
Montrer que si $x \in [0;2]$ alors $x \leq \sqrt{2+x}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exemple 23 :
Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}={u_n}^2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la formule : $u_n=(u_0)^{2^n}$.

Exemple 1 :

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Notons P_n la propriété : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Initialisation :
La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$?
$\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; montrons alors que $1+2+\cdots+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$1+2+\cdots+(n+1) = [1+2+\cdots+n] + (n+1)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Donc

$$1+2+\cdots+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

De plus, on a :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc on a $1+2+\cdots+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.
C'est à dire : pour tout n entier, $n \geq 1$, $\quad 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 3 :

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration :

Montrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geq 1$, on a : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Notons P_n la propriété : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

• Initialisation :
La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $1 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$?
$\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. Donc P_1 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier n, $n \geq 1$ on a : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$; montrons alors que $1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

car d'après l'hypothèse de récurrence : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
De plus, on a :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

On reconnaît l'identité remarquable $n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
Donc on a $1^3 + 2^3 + \cdots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.
C'est à dire : pour tout n entier, $n \geq 1$, $\quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exemple 5 :
Montrer que pour tout entier n, $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$

Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2^{n-1} \leq n!$

Notons P_n la propriété : $2^{n-1} \leq n!$

• Initialisation :
La propriété P_1 est-elle vraie ? A-t-on $2^0 \leq 1!$?
$2^0 = 1$ et $1! = 1$. Donc P_1 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \geq 1$ on a : $2^{n-1} \leq n!$; montrons alors que $2^n \leq (n+1)!$
D'après l'hypothèse de récurrence, on a $2^{n-1} \leq n!$. Donc $2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times (n!)$
Or $(n+1)! = (n+1) \times (n!)$. Donc puisque $1 \leq n$, $2 \leq n+1$ et $2 \times (n!) \leq (n+1) \times (n!) = (n+1)!$
Et on a donc $2^n \leq 2 \times (n!) \leq (n+1)!$
Donc $2^n \leq (n+1)!$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.
C'est à dire : pour tout $n \geq 1$, $2^{n-1} \leq n!$

Exemple 7 :
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.
Démonstration :
Montrons par récurrence que $u_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons P_n la propriété : $u_n = 3$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 = 3$?
Ceci est vrai d'après l'énoncé. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 3$; montrons alors que $u_{n+1} = 3$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n = 3$; et d'après l'énoncé, on a $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$. Donc

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3}$$

De plus, on a :

$$\frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3} = 3$$

Donc on a $u_{n+1} = 3$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$.

Exemple 10 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5}$.
Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.
En déduire que (u_n) est bien définie.

Démonstration :

Montrons par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n.

Notons P_n la propriété : $u_n \geq 0$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 \geq 0$?
Ceci est vrai car d'après l'énoncé $u_0 = 1$. Donc P_0 est vraie.

• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geq 0$; montrons alors que $u_{n+1} \geq 0$.

$$u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5}$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \geq 0$. Donc $5u_n \geq 0$ et $3u_n + 5 \geq 5 > 0$.
Par conséquent, $\dfrac{5u_n}{3u_n+5} \geq 0$. Donc on a $u_{n+1} \geq 0$ et P_{n+1} est vraie.

• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Puisque l'on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_n + 5 > 0$. Et la suite (u_n) est bien définie.

Exemple 15 :
Soit $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Notons P_n la propriété : $(1+x)^n \geq 1+nx$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $(1+x)^0 \geq 1$?
Ceci est vrai car $(1+x)^0 = 1$. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$; montrons alors que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $(1+x)^n \geq 1+nx$. Et $1+x \geq 0$. Donc on a $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$.
Et $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.
Par conséquent $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n=0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exemple 19 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

Notons P_n la propriété : $2 \leq u_n \leq 3$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $2 \leq u_0 \leq 3$?
Ceci est vrai car $u_0 = 2$. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq u_n \leq 3$; montrons alors que $2 \leq u_{n+1} \leq 3$.
$u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $2 \leq u_n \leq 3$. Donc $8 \leq 6 + u_n \leq 9$. Et $2\sqrt{2} = \sqrt{8} \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3$.
De plus, $2 \leq 2\sqrt{2}$ donc on a $2 \leq \sqrt{6 + u_n} \leq 3$.
Et par conséquent $2 \leq u_{n+1} \leq 3$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_{n+1} \leq 3$.

Exemple 20 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = n\,2^n$.

Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = n\,2^n$.

Notons P_n la propriété : $u_n = n\,2^n$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 = 0$?
Ceci est vrai d'après l'énoncé. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = n\,2^n$; montrons alors que $u_{n+1} = (n+1)\,2^{n+1}$.
$u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = n\,2^n$.

Donc $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n) = 2(n\,2^n + 2^n) = 2(2^n(n+1)) = 2^{n+1}(n+1)$.
Par conséquent $u_{n+1} = (n+1)\,2^{n+1}$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\,2^n$.

Exemple 21 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.
Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $x \leq \sqrt{2 + x}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Notons P_n la propriété : $0 \leq u_n \leq 2$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $0 \leq u_0 \leq 2$?
Ceci est vrai car $u_0 = 0$. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 2$; montrons alors que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq 2$. Donc $2 \leq 2 + u_n \leq 4$. Et $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$.
De plus, $0 \leq \sqrt{2}$ donc on a $0 \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$.
Et par conséquent $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Montrons que si $x \in [0; 2]$ alors $x \leq \sqrt{2 + x}$.

Soit $x \in [0; 2]$ fixé ; alors $x \leq \sqrt{2 + x}$ équivaut à $x^2 \leq 2 + x$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Or si on pose $P(x) = x^2 - x - 2$, polynôme de degré 2, on trouve $\Delta = 9$ et les racines -1 et 2. Et $P(x)$ est négatif entre les racines. Donc on a en particulier $x^2 - x - 2 \leq 0$ pour tout $x \in [0; 2]$.
On a donc $x \leq \sqrt{2 + x}$ pour tout $x \in [0; 2]$.

Puisque $x \leq \sqrt{2 + x}$ pour tout $x \in [0; 2]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq \sqrt{2 + u_n}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_{n+1}$.
Et la suite (u_n) est croissante.

Exemple 23 :
Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la formule : $u_n = (u_0)^{2^n}$.
Démonstration :
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (u_0)^{2^n}$.

Notons P_n la propriété : $u_n = (u_0)^{2^n}$.

• Initialisation :
La propriété P_0 est-elle vraie ? A-t-on $u_0 = (u_0)^{2^0}$?
Ceci est vrai car $(u_0)^{2^0} = u_0$. Donc P_0 est vraie.
• Hérédité :
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = (u_0)^{2^n}$; montrons alors que $u_{n+1} = (u_0)^{2^{n+1}}$.
On a $u_{n+1} = {u_n}^2$ et d'après l'hypothèse de récurrence : $u_n = (u_0)^{2^n}$.

Donc $u_{n+1} = \left((u_0)^{2^n}\right)^2 = (u_0)^{2^n \times 2} = (u_0)^{2^{n+1}}$ et P_{n+1} est vraie.
• Conclusion :
La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
C'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (u_0)^{2^n}$.